

博 士 論 文

競争モデルに基づく連続時間力学系による
離散値トモグラフィ画像再構成法

兒島 雄志

2019 年 3 月

あらまし

コンピュータ断層 (CT) 画像再構成は対象物の内部構造を透過や放射の方法で測定した投影から推定し、濃淡画像として表現することであり、X 線 CT や PET, SPECT の基本原理に用いられている。CT 画像再構成法にはフィルタ補正逆投影法と逐次再構成法が知られている。フィルタ補正逆投影法は変換法であり、逐次再構成法と比較して結果が高速に得られる特徴がある。逐次再構成法は非適切な場合に比較的アーチファクトの少ない高品質な画像を得ることが可能である。

近年、異なるアプローチとして、非線形微分方程式系の初期値問題に基づいた画像再構成法（連続時間画像再構成法）が提案されている。すなわち、望ましい再構成画像に対応する解を安定平衡点とする非線形微分方程式系を構成し、適切な初期値からスタートした解が理想解に収束することを期待する方法である。連続時間画像再構成法は、解の大域的安定性と局所的安定性をそれぞれリアプノフ定理と平衡点におけるヤコビ行列を用いることで理論的に示すことが可能である。また、連続時間画像再構成法を構成する微分方程式を低次の数値離散により差分方程式へ変換することで、逐次再構成法を得ることができる。実際、逐次再構成法の差分方程式に数値離散が一致する微分方程式系に基づいた連続時間画像再構成法が提案されている。逐次再構成法の背景に連続時間画像再構成が存在していると理解できるため、連続時間画像再構成法の理論的解析結果に基づき、対応する逐次再構成法の性質を間接的に示すことができる。

CT 画像再構成では画像の濃度値として連続値を扱うのに対し、比較的小数の離散値を扱う再構成を離散値トモグラフィという。本論文では、2 値の濃度ラベル扱う再構成をバイナリトモグラフィ、3 値以上の濃度ラベルを扱う再構成を離散値トモグラフィと区別して呼ぶことにする。バイナリトモグラフィおよび離散値トモグラフィは、濃度ラベルを先見情報として、少ない投影数で比較的高品質な再構成画像を得ることを目的としている。

本論文では、離散値トモグラフィの解法として、競争モデルに基づく非線形微分方程式系の初期値問題によって目的の画像再構成を達成させる方法を提案する。具体的には、離散値トモグラフィの再構成問題を、濃度ラベル数倍だけ拡張したバイナリトモグラフィの問題に帰着させる。ただし、状態変数は画素を構成する濃度ラベルの重みを表しており、理想的には何れかのひとつの状態変数が 1 で他は 0 であることが望まれるため、排他的仕組みが必要である。排他的仕組みを備えた非線形微分方程式系を一般化ロトカ・ボルテラ型の競争モデルに基づき構成し、真の画像に対応した安定平衡点への解軌道の収束によって目的の画像再構成を期待する方法を提案した。競争モデルのダイナミクスに動機づけられて導出した微分方程式を原理に用いたアプローチは本研究が最初である。

本研究の主要な成果は、提案系に存在する平衡点の特定と平衡点の安定性を理論的に明らかにした

ことにある．解析結果の一例として，理想解に対応する平衡点と他の安定平衡点が共存していることが明らかとなった．この結果は理想解を得るためには適切な初期値を与える必要があることを意味し，系に存在するサドル型不安定平衡点の安定多様体が，理想解に収束する初期値集合（ベイスン）を分ける境界となっていることが予想される．

さらに，多くの離散値トモグラフィに関する研究では濃度ラベルが既知であることを前提としているが，画像診断支援システムへの応用において，臓器や腫瘍などの領域を自動的に抽出することを目的とした場合に，各領域のおおよその濃度ラベル値を与えることができるが，領域の濃度値は完全に均一ではない．第2章の微分方程式系を非自律系に拡張することで，与えられる濃度ラベルが不正確であったとしても，濃度値を濃度ラベルに丸めた画像再構成が達成できることを示した．

本論文で用いる記号

本論文では，明示されていない場合を除き，以下の記号を用いる．

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \dots$	ベクトル
$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \dots$	行列
$\mathcal{S}, \mathcal{T}, \dots$	集合
\mathbb{R}	実数の集合
\mathbb{R}_+	非負の実数の集合
\mathbb{R}_{++}	正の実数の集合
\mathbb{R}^N	N 次の実数ベクトルの集合
$\mathbb{R}^{N \times M}$	$N \times M$ のサイズの実数行列の集合
\boldsymbol{U}_N	$N \times N$ の単位行列
$\mathbf{0}$	すべての要素が 0 であるベクトル
$\mathbf{1}$	すべての要素が 1 であるベクトル
$\ \cdot\ _n$	ベクトルの n ノルム
\otimes	行列のクロネッカー積
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	内積
\top	行列，ベクトルの転置
$\text{diag}(\boldsymbol{x})$	ベクトル \boldsymbol{x} の要素を対角成分にもつ対角行列

目次

第 1 章	連続時間画像再構成法	9
1.1	はじめに	9
1.2	常微分方程式系	10
1.2.1	リアプノフの意味での安定性	10
1.2.2	平衡点のヤコビ行列による局所的安定性の解析	11
1.2.3	リアプノフの安定性定理	11
1.3	連続時間画像再構成法	12
1.3.1	ART 型の連続時間画像再構成法	12
1.3.2	投影と投影作用素をブロック化した連続時間画像再構成法	13
1.3.3	バイナリトモグラフィのための連続時間画像再構成法	14
第 2 章	自律系に基づく離散値トモグラフィ再構成法	17
2.1	はじめに	17
2.2	離散値トモグラフィの問題設定	18
2.3	離散値トモグラフィを達成する非線形力学系	19
2.4	理論的解析結果	20
2.5	数値実験	23
2.5.1	低次元系における解の挙動	23
2.5.2	高次元系における再構成画像	28
第 3 章	非自律系に基づく離散値トモグラフィ再構成法	35
3.1	はじめに	35
3.2	非自律系への拡張	36
3.3	数値実験	36
3.3.1	低次元系における連続時間非自律系の解の挙動	36
3.3.2	高次元系における再構成画像	38
第 4 章	結論	41
	参考文献	45

本研究に関連する文献

47

第 1 章

連続時間画像再構成法

1.1 はじめに

CT 画像再構成は対象物の内部構造を透過や放射の方法で測定した投影から推定し、濃淡画像として表現することであり、X 線 CT や PET, SPECT の基本原理として知られている [1, 2]. CT 画像再構成法にはフィルタ補正逆投影法と逐次再構成法が知られている. フィルタ補正逆投影法は変換法であり、逐次再構成法と比較して高速に結果を得ることが可能である特徴を持つ. 逐次再構成法は非適切な場合でも比較的アーチファクトの少ない高品質な画像を得ることが可能である. ただし、画素数が大きくなると長時間の計算時間を要するため、医用分野において逐次再構成法が実用化されているのは以前まで画像サイズの小さな核医学分野に限定されていたが、現在では X 線 CT でも実用化されており、逐次再構成法の改良に関する研究が活発に行われている.

近年、異なるアプローチとして、非線形微分方程式系の初期値問題に基づいた再構成法（連続時間画像再構成法）が提案されている [3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]. すなわち、望ましい再構成画像に対応する理想解を安定平衡点とする非線形微分方程式系に適切な初期値を与え、解が理想解に収束することを期待する方法である. 連続時間画像再構成法は、解の大域的安定性と局所的安定性をそれぞれリアプノフ定理と平衡点におけるヤコビ行列を用いることで理論的に示すことが可能である.

最初に報告された連続時間画像再構成法 [3] は、CT 逆問題の線形代数方程式系から導出された 2 ノルムに基づく評価関数の勾配系を非線形に拡張することにより構成されている. 微分方程式の解の存在と一意性の定理に基づき、意図通り正值性を保つことが証明されている. さらに、系に存在する理想解に対応する平衡点の安定性をリアプノフ定理により証明するとともに、望ましくない平衡点が不安定であることを変分方程式のヤコビ行列の正定値性を示すことにより証明している. また、ハイブリッドシステムへ拡張した方法も提案されている. すなわち、システムを複数のサブシステムに分割し、時刻によってサブシステムを切り替える方法である. 当該論文では各サブシステムにおける大域的安定性を示すに留まっているが、論文 [4] では共通リアプノフ関数を発見し、ハイブリッドシステムの大域的安定性を示すことに成功している.

連続時間画像再構成法は、微分方程式系をオイラー法や低次のルンゲクッタ法などの数値離散により差分方程式系を導出することで新たな逐次再構成法を開発することが可能である. すなわち、逐次

再構成法の背景に連続時間画像再構成法が存在すると理解することができる。実際、加法的オイラー法によって数値離散化された系が逐次法として知られる最尤推定期待値最大化法 (ML-EM)[10] と一致する連続時間画像再構成法が開発されている [5]。ML-EM 法と比較して、連続時間画像再構成法の方が雑音除去の効果が高く、高精細な画像が得られることが報告されている。さらに、乗法的オイラー法 [11, 12] によって数値離散化された系が、乗法的代数的再構成法 (MART)[13] や OS-EM 法 [14] と一致する連続時間画像再構成法が開発されている [6, 7]。これらの連続時間画像再構成法の微分方程式系に対して、より数値離散の誤差が少ない乗法的ルンゲクッタ法を適用し、より高品質な画像を再構成できる逐次再構成法を開発できることが報告されている。

連続時間画像再構成法の CT 画像再構成以外の応用として、再構成すべき画像の画素値が 0 (背景値) または 1 の 2 値であるバイナリトモグラフィに対して効果的に適用可能である系も提案されている [8, 9]。理想解に対応する平衡点の大域的安定性と、それ以外の平衡点の局所的不安定性、および、画素値が非負で 1 以下となることが理論的に保証されている。

本章では、本研究と関連する非線形力学系理論と、連続時間画像再構成法の先行研究についてまとめる。

1.2 常微分方程式系

本研究では連続微分可能な自律系

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)), \quad t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad (1.1)$$

を扱う。

本節の以降では、連続時間画像再構成に関わる力学系の理論について述べる。

1.2.1 リアプノフの意味での安定性

本研究において自律系の平衡点が安定であるとは、リアプノフの意味で安定であることをいう。自律系 (1.1) の平衡点を \mathbf{x}^* とする。平衡点 \mathbf{x}^* がリアプノフの意味で安定であるのは次の 2 条件が満たされるときである。ただし、 $t = 0$, $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0$ を初期値とする式 (1.1) の解を $\phi(t, \mathbf{x}^0)$ で表す。

1. 十分小さい正の数 ρ が存在して、 $|\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^*| < \rho$ のとき、方程式 (1.1) の解 $\phi(t, \mathbf{x}^0)$ は全ての $t > 0$ に対して存在する。
2. 任意の正の数 ε に対して正の数 $\delta < \rho$ が存在して、 $|\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^*| < \delta$ のとき、 $t > 0$ において $|\phi(t, \mathbf{x}^0) - \mathbf{x}^*| < \varepsilon$ が成り立つ。

リアプノフの意味で安定な平衡点 \mathbf{x}^* が漸近安定であるというのは、

3. 十分小さい正の数 $\sigma < \rho$ が存在して、 $|\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^*| < \sigma$ のとき、

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |\phi(t, \mathbf{x}^0) - \mathbf{x}^*| = 0$$

が成り立つことである。

1.2.2 平衡点のヤコビ行列による局所的安定性の解析

平衡点の近傍における局所的安定性を判別する方法である平衡点のヤコビ行列を用いた方法について説明する。

常微分方程式 (1.1) の平衡点を \mathbf{x}^* とする。すなわち、

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0} \quad (1.2)$$

が満たされる。平衡点 \mathbf{x}^* からの変分を $\boldsymbol{\xi}(t)$ とする:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^* + \boldsymbol{\xi}(t) \quad (1.3)$$

式 (1.3) を式 (1.1) に代入し、平衡点 \mathbf{x}^* 近傍でテーラー展開すると

$$\frac{d(\mathbf{x}^* + \boldsymbol{\xi}(t))}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^*) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} \boldsymbol{\xi}(t) + \cdots \quad (1.4)$$

が得られる。式 (1.4) 右辺から線形項のみを取り出し、式 (1.2) を鑑みると、

$$\frac{d\boldsymbol{\xi}(t)}{dt} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} \boldsymbol{\xi}(t) \quad (1.5)$$

を得る。ここで、式 (1.5) を平衡点 \mathbf{x}^* に関する変分方程式といい、

$$\left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*}$$

を平衡点 \mathbf{x}^* のヤコビ行列と呼ぶ。

平衡点の近傍における局所的安定性はヤコビ行列の固有値で決まる。具体的には、全ての固有値の実部が非正であるときには平衡点は安定となり、そうでなければ不安定となる。特に、全ての固有値の実部が負または 0 で、かつその両方を含むとき平衡点は半安定という。半安定な平衡点は、平衡点近傍の線形空間において、解は平衡点から引き離されることなくある近傍に留まるので、リアプノフの意味で安定である。また、固有値の実部が正と負を両方含むとき平衡点はサドル型の安定性をもつという。

1.2.3 リアプノフの安定性定理

平衡点の大域的安定性を理論的に示すことのできる唯一の方法としてリアプノフの安定性定理が知られている。リアプノフの安定性定理を証明なしに述べておく。

$t = 0$ のときに \mathbf{x}_0 を通る式 (1.1) の解を $\boldsymbol{\phi}(t, \mathbf{x})$ とする。開集合 $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ を定義域とする \mathbf{x} の関数

$V(\mathbf{x}) : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}_+$ を考えたとき、系 (1.1) にもとづく関数 $V(\mathbf{x})$ の微分 $\dot{V}\big|_{(1.1)}(\mathbf{x})$ を以下で定義する:

$$\begin{aligned}\dot{V}\big|_{(1.1)}(\mathbf{x}) &= \frac{d}{dt}V(\phi(t, \mathbf{x}))\bigg|_{t=0} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial x_i} f_i(\mathbf{x}).\end{aligned}$$

リアプノフの安定性定理により、系 (1.1) の平衡点 \mathbf{x}^* が安定であることの十分条件は、次の 2 条件が成り立つときである.

- 1 $V(\mathbf{x}^*) = 0$, かつ $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^*$ に対して $V(\mathbf{x}) > 0$.
- 2 $\mathcal{U} \setminus \mathbf{x}^*$ 上で $\dot{V}\big|_{(1.1)}(\mathbf{x}) \leq 0$.

このとき、関数 V は \mathbf{x}^* のリアプノフ関数という. さらに次の条件

- 3 $\mathcal{U} \setminus \mathbf{x}^*$ 上で $\dot{V}\big|_{(1.1)}(\mathbf{x}) < 0$

が満たされるときは、 \mathbf{x}^* は漸近安定な平衡点となる. このとき、関数 V は狭義のリアプノフ関数と呼ばれる. さらに、 \dot{V} が定義域に渡って負値をとるならば、平衡点 \mathbf{x}^* は大域的に漸近安定となる.

1.3 連続時間画像再構成法

本研究では、測定された投影 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^I$ と画素値 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^J$ との関係を既知の投影作用素 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_+^{I \times J}$ を用いて

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{1.6}$$

とモデル化した問題を考える. 連続時間画像再構成法は式 (1.6) の逆問題を最小化問題に帰着させて解く方法である.

1.3.1 ART 型の連続時間画像再構成法

連続時間画像再構成法として最初に提案されたシステム [3] は、次の非線形微分方程式系の初期値問題により記述される:

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{X}\mathbf{A}^\top(\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}) =: \mathbf{f}(\mathbf{x}), \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}_{++}^J, \\ t &\in \mathbb{R}_+.\end{aligned} \tag{1.7}$$

ここに、 $\mathbf{X} := \text{diag}(\mathbf{x})$ である. 式 (1.7) 中の $\mathbf{A}^\top(\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x})$ は、投影と順投影との差の 2 ノルム

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|_2^2$$

の勾配系となっている．さらに， \mathbf{X} の乗算により解の正值性が保証されている ([3] の命題 1 参照)．

系 (1.7) に存在する平衡点と，それらの安定性は理論的に明らかにされている． $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{e}$ を満たす理想解に対応する平衡点 \mathbf{e} の漸近的安定性は関数 $V(\mathbf{x})$ をリアプノフ関数としてリアプノフの安定性定理により証明されている ([3] の命題 2 参照)．また，系 (1.7) には，理想解ではない解に対応する平衡点 $\mathbf{0}$ が存在する．ただし，関数 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ の \mathbf{x} に関する微分

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) = -\mathbf{X}\mathbf{A}^\top \mathbf{A} + \text{diag}(\mathbf{A}^\top (\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x})) \quad (1.8)$$

を用いて，

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{0}) = \text{diag}(\mathbf{A}^\top \mathbf{y})$$

より，平衡点 $\mathbf{0}$ が不安定であることが示されている ([3] の命題 3 参照)．

系 (1.7) をオイラー法により離散化すると，

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(n+1) &= \mathbf{z}(n) + h \text{diag}(\mathbf{z}(n)) \mathbf{A}^\top (\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{z}(n)), \\ \mathbf{z}(0) &= \mathbf{x}_0, \\ n &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (1.9)$$

が得られる．ここに， h は刻み幅である．式 (1.9) は逐次再構成法として知られる代数的再構成法

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(n+1) &= \mathbf{z}(n) + h \mathbf{A}^\top (\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{z}(n)), \\ \mathbf{z}(0) &= \mathbf{x}_0, \\ n &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

の拡張となっている．

1.3.2 投影と投影作用素をブロック化した連続時間画像再構成法

投影 \mathbf{y} と投影作用素 \mathbf{A} をそれぞれ M 個の部分ベクトル及び部分行列に分割する：

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \mathbf{y}^1 \\ \mathbf{y}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{y}^M \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^1 \\ \mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{A}^M \end{pmatrix}. \quad (1.10)$$

ここに， $\mathbf{y}^1 \in \mathbb{R}_+^{I^1}$ ， $\mathbf{y}^2 \in \mathbb{R}_+^{I^2}$ ， \dots ， $\mathbf{y}^M \in \mathbb{R}_+^{I^M}$ ， $\mathbf{A}^1 \in \mathbb{R}_+^{I^1 \times J}$ ， $\mathbf{A}^2 \in \mathbb{R}_+^{I^2 \times J}$ ， \dots ， $\mathbf{A}^M \in \mathbb{R}_+^{I^M \times J}$ である．

式 (1.7) の非線形微分方程式系を順次適用する非線形ハイブリッドシステム

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{X}\mathbf{A}^{m\top}(\mathbf{y}^m - \mathbf{A}^m\mathbf{x}), \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}_+^J \setminus \{\mathbf{0}\}, \\ t - k\tau &\in [t^{m-1}, t^m), \quad 0 = t^0 < t^1 < \dots < t^M = \tau, \\ m &= 1, 2, \dots, M, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (1.11)$$

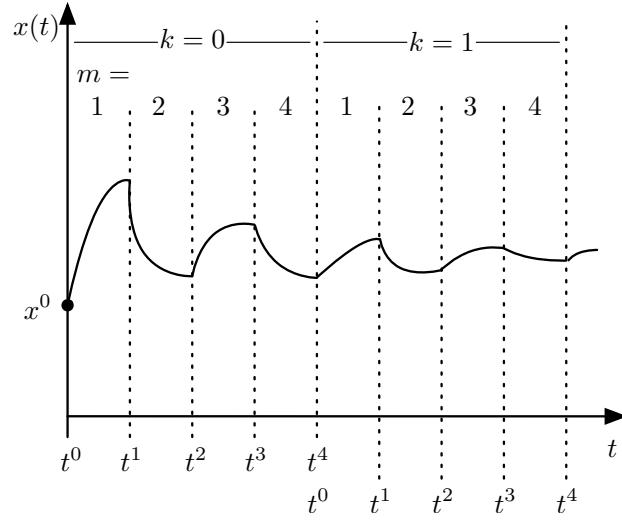


図 1.1 ブロック型連続法による解の時間変化の概念図

による連続法が提案されている [4]. 図 1.1 に示すように, 解 \mathbf{x} を接続しながらシステムを切り替える.

線形代数方程式 (1.6) の解に対応する平衡点の大域的安定性は, \mathbf{x} と真値 $\mathbf{e} := (e_1, e_2, \dots, e_J)^\top$ の一般化 Kullback–Leibler (KL) ダイバージェンス [15]

$$\text{KL}(\mathbf{x}, \mathbf{e}) := \sum_{j=1}^J e_j \log \frac{e_j}{x_j} + x_j - e_j$$

を共通リアプノフ関数として, リアプノフの安定性により証明されている.

1.3.3 バイナリトモグラフィのための連続時間画像再構成法

画素値として 0 または 1 の 2 値を扱う画像再構成であるバイナリトモグラフィを達成する連続時間画像再構成法として, 次の微分方程式系が提案されている [8, 9].

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{X}(\mathbf{U}_J - \mathbf{X})\mathbf{A}^{m\top}(\mathbf{y}^m - \mathbf{A}^m\mathbf{x}), \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \in (0, 1)^J, \\ t &\in \mathbb{R}_+ \end{aligned} \tag{1.12}$$

式 (1.12) の右辺は式 (1.7) の右辺に $(\mathbf{U}_J - \mathbf{X})$ を乗じることで構成されている. この乗算により, 解が $(0, 1)^J$ 空間に拘束されることが保証されている ([8] の命題 1 参照). また, 平衡点 $\mathbf{0}$ および $\mathbf{1}$ が存在するが, 関数 $f^m(\mathbf{x})$ の \mathbf{x} に関する微分

$$\frac{\partial f^m}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) = -\mathbf{X}(\mathbf{U}_J - \mathbf{X})\mathbf{A}^{m\top}\mathbf{A}^m - (\mathbf{U}_J - 2\mathbf{X})\text{diag}(\mathbf{A}^{m\top}(\mathbf{A}^m\mathbf{x} - \mathbf{y}^m)) \tag{1.13}$$

を用いて，平衡点 $\mathbf{1}$ および $\mathbf{0}$ のヤコビ行列はそれぞれ

$$\frac{\partial \mathbf{f}^m}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{1}) = \text{diag}(\mathbf{A}^{m\top}(\mathbf{A}^m \mathbf{1} - \mathbf{y}^m)) \quad (1.14)$$

および

$$\frac{\partial \mathbf{f}^m}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{0}) = \text{diag}(\mathbf{A}^{m\top} \mathbf{y}^m) \quad (1.15)$$

となり，これらの平衡点は不安定である ([8] の命題 2, 3 参照)．代数方程式 (1.6) の解に対応する平衡点 \mathbf{e} の漸近的安定性は，一般化 KL ダイバージェンスを 2 重に用いた

$$V(\mathbf{x}) = \text{KL}(\mathbf{x}, \mathbf{e}) + \text{KL}(\mathbf{1} - \mathbf{x}, \mathbf{1} - \mathbf{e})$$

をリアプノフ関数として，リアプノフ定理により証明されている ([8] の命題 3 参照)．

第 2 章

自律系に基づく離散値トモグラフィ再構成法

2.1 はじめに

本研究で考える離散値トモグラフィは、投影から対象物の内部構造を小数の濃度ラベルの分布として表現することであり、濃度レベルを先見情報として、少ない投影数で比較的高品質な再構成画像を得ることを目的としている。特に本章では、対象物を構成する濃度ラベルが既知である場合にその分布を求める問題を考える。

本研究では、競争モデルに基づく非線形微分方程式系の初期値問題によって目的の画像再構成を達成させる方法を提案する。具体的には、離散値トモグラフィの再構成問題を、濃度ラベル数倍だけ拡張したバイナリトモグラフィの問題に帰着させる。ただし、状態変数は画素を構成する濃度ラベルの重みを表しており、理想的には何れかのひとつの状態変数が 1 で、他は 0 であることが望まれるため、排他的仕組みが必要である。排他的仕組みを備えた非線形微分方程式系を一般化ロトカ・ボルテラ型の競争モデルに基づき構成し、真の画像に対応した安定平衡点への解軌道の収束によって目的の画像再構成を期待する方法を提案した。

離散値トモグラフィの従来法として DART (discrete algebraic reconstruction technique)[16, 17] や、エネルギー関数の最小化問題に基づく方法 [18] がある。DART は、逐次画像再構成法に画像領域分割を組み合わせた方法であり、収束特性が理論的には保証されていないアルゴリズムであるが、実験により有用性が示されている。エネルギー関数の最小化問題に基づく方法は、画素値を表す状態変数が濃度ラベルと一致し、かつ、連続値 CT 画像再構成が達成されるときに最小となるエネルギー関数を構成し、反復手続きにより最小値を求める方法である。いずれの方法も逐次画像再構成法に、画素値が濃度ラベルである制約を満たすための仕組みを導入した方法である。提案法のように、競争モデルのダイナミクスに動機づけられて導出した微分方程式を原理に用いたアプローチは本研究が最初である。

本章では、連続時間力学系に基づく離散値トモグラフィについて述べる。微分方程式系には複数の安定および不安定平衡点が共存することを理論的に示すことができる。さらに、実験を通して、安定

平衡点へ収束する状態変数の初期値集合が存在することを明らかとする．適切な初期値を選ぶことにより，画像を濃度レベルごとに正しく分割した再構成が達成できることを例証する．

2.2 離散値トモグラフィの問題設定

集合 \mathbb{R}_+ を非負の実数とし，投影を $\mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^I$ ，投影作用素を $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_+^{I \times J}$ で表す．画像の最大濃度値を 1 に仮定し，個数 L の濃度レベルを示すベクトル $\mathbf{g} \in (0, 1]^L$ をラベル集合 [19] と呼ぶ (画像の背景に対応した濃度値 0 は要素から除く)．ラベル集合 \mathbf{g} の要素は，便宜上，

$$0 < g_1 < g_2 < \cdots < g_L$$

の順に並べられているとする．また，ラベル集合に関して，次の行列

$$\mathbf{G} := \mathbf{U}_J \otimes \mathbf{g}^\top \in [0, 1]^{J \times JL} \quad (2.1)$$

を準備しておくこと以降の定義に便利である．ここに， \mathbf{U}_J は $J \times J$ の単位行列， $^\top$ は転置， \otimes はクロネッカー積を表す．

以上の準備のもとで，離散値トモグラフィとは，

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{G}\mathbf{x} \quad (2.2)$$

を満たす $\mathbf{x} \in [0, 1]^{JL}$ を求める問題であるということが出来る． $\mathbf{G}\mathbf{x}$ は再構成画像の濃度値を表すことに注意する．理想的には， \mathbf{x} の各要素は 0 または 1 であるべきであるが，ラベル集合の要素値が正確な値でなかったり，逆問題が ill-posed となる場合を考慮して，区間 $[0, 1]$ の実数値を考えている．一方，問題が consistent な場合における式 (2.2) の解を $\mathbf{e} \in \{0, 1\}^{JL}$ ，および，別表記

$$d_{j,\ell} := e_{(j-1)L+\ell} \quad (2.3)$$

($j = 1, 2, \dots, J, \ell = 1, 2, \dots, L$) としたとき，次の関係が成り立つ．すなわち，任意の j に対し，画素値に応じて，

$$\sum_{\ell=1}^L d_{j,\ell} = 1 \quad (2.4)$$

または

$$\sum_{\ell=1}^L d_{j,\ell} = 0 \quad (2.5)$$

のどちらかの条件を満たす．後者の条件は，画素値が 0 (背景画像) であることを意味する．離散値トモグラフィの逆問題で解くべき式 (2.2) においても，式 (2.4)，式 (2.5) に対応した条件を \mathbf{x} が満足する必要がある．

2.3 離散値トモグラフィを達成する非線形力学系

離散値トモグラフィの解法として、次式で与えられる自律系の初期値問題を考える。

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{X}(\mathbf{U}_{JL} - \mathbf{X}) ((\mathbf{A}\mathbf{G})^\top (\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{G}\mathbf{x}) - \Psi\mathbf{x}), \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}^0 \in (0, 1)^{JL} \end{aligned} \quad (2.6)$$

ここに、 $\mathbf{U}_{JL} \in \mathbb{R}^{JL \times JL}$ は単位行列、 $\mathbf{X} := \text{diag}(\mathbf{x})$ (ベクトル \mathbf{x} の要素を対角要素とする対角行列) であり、行列 Ψ は次の通り:

$$\Psi := \frac{1}{L} \mathbf{U}_J \otimes (\mathbf{g}\mathbf{g}^\top - \text{diag}^2(\mathbf{g})) \quad (2.7)$$

ベクトルと行列で表した式 (2.6), 式 (2.7) の別表現として、要素ごとに記述すると次のように書ける。

$$\frac{dw_{j,\ell}}{dt} = w_{j,\ell}(1 - w_{j,\ell}) \left(((\mathbf{A}\mathbf{G})^\top)_{(j-1)L+\ell} (\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{G}\mathbf{x}) - \frac{g_\ell}{L} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq \ell}}^L g_k w_{j,k} \right) \quad (2.8)$$

ここで、 $j = 1, 2, \dots, J$, $\ell = 1, 2, \dots, L$. ただし,

$$w_{j,\ell} := x_{(j-1)L+\ell}$$

である。ベクトル \mathbf{x} の要素を行列に整理した

$$\mathbf{W} := \begin{pmatrix} w_{1,1} & w_{1,2} & \cdots & w_{1,L} \\ w_{2,1} & w_{2,2} & \cdots & w_{2,L} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{J,1} & w_{J,2} & \cdots & w_{J,L} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_+^{J \times L}$$

を用意したとき、再構成画像の画素値は

$$\mathbf{G}\mathbf{x} = \mathbf{W}\mathbf{g}$$

とも書ける。

式 (2.6) は次を根拠に想起した力学系である。まず、式 (2.6) の $(-\Psi\mathbf{x})$ を除いた系は、1.3.3 節に示したバイナリトモグラフィのための連続時間画像再構成法となっている。式中のベクトル場における $\mathbf{X}(\mathbf{U}_{JL} - \mathbf{X})$ の乗算による効果に基づき、初期値 $\mathbf{x}^0 = (0, 1)^{JL}$ から出発した解 $\mathbf{x}(t)$ は、任意の t において $(0, 1)^{JL}$ の部分空間内に拘束されて振る舞い、さらに、バイナリ値 0 と 1 を持つ真値への収束性が良好である特長がある。

次に、 $(-\Psi\mathbf{x})$ の項を加算した理由は、画像の背景 (条件式 (2.5)) 以外の画素では、真値での条件式 (2.4) に対応した

$$\sum_{\ell=1}^L w_{j,\ell}(t) \rightarrow 1, \quad t \rightarrow \infty \quad (2.9)$$

すなわち,

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq \ell}}^L w_{j,k}(t) \rightarrow 0, \text{ および } w_{j,\ell}(t) \rightarrow 1, \quad t \rightarrow \infty$$

が成り立つことを意図しているためである．このダイナミクスには，捕食者と被食者の競争モデルとして知られる一般化ロトカ・ボルテラ方程式 [20] を参考にした．モデルの条件によっては，単一の生物のみが生存し，他の生物は絶滅する挙動を得ることができる．類似的に，ある j 番目の画素値において，真の濃度値 g_ℓ に対応した $w_{j,\ell}(t)$ の値が 1 に近くなると，他の $w_{j,k}(t)$ ($k \neq \ell$) の値は 0 へ漸近するよう，競争原理に相当したダイナミクスが自然に働くことを期待している．なお， $(-\Psi \mathbf{x})$ の項を加算しても，行列 Ψ の定義により

$$\text{diag}(\mathbf{e})\Psi \mathbf{e} = \mathbf{0}$$

が成り立つことから，式 (2.6) の平衡点には \mathbf{e} が含まれることに注意する．

2.4 理論的解析結果

解 $\mathbf{x}(t)$ が $(0, 1)^{JL}$ に留まることを証明する．画素値 $\mathbf{G}\mathbf{x}$ は非負で 1 以下であることから，制約付き最適化問題を解く上で望ましい性質である．式 (2.6) を形式上，

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (2.10)$$

と書くことにする．

命題 1. 式 (2.6) の初期値を $\mathbf{x}^0 \in (0, 1)^{JL}$ に選んだとき，解 $\phi(t, \mathbf{x}^0)$ はすべての $t \geq 0$ において， $(0, 1)^{JL}$ 内に存在する．

証明. 任意の j に対し，系は $dx_j/dt = f_j(\mathbf{x})$ と書くことができるので， $x_j = 0$ または $x_j = 1$ の部分空間において，解は $d\phi_j/dt = 0$ を満たす．したがって，部分空間は不変であり，初期値問題の解の一意性により，解軌道は任意の不変部分空間を横切ることができない．このことは，初期値 $\mathbf{x}^0 \in (0, 1)^{JL}$ から出発した式 (2.6) の任意の解 $\phi(t, \mathbf{x}^0)$ は任意の時刻 $t \geq 0$ で部分空間 $(0, 1)^{JL}$ に留まる． \square

提案法は，真値に対応した平衡点 \mathbf{e} への収束により離散値トモグラフィを解決させるアプローチであり，平衡点の安定性や \mathbf{e} のベイスン (初期値領域) の存在が重要な問題となる．

この節の以降においては，測定は完全で雑音は存在せず，式 (2.2) の逆問題は consistent であると仮定する．したがって，代数方程式 (2.2) には解 \mathbf{e} が唯一存在する．

いま，ベクトル場 \mathbf{f} のヤコビ行列，すなわち，関数 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ の \mathbf{x} に関する微分を与えておく．

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) = & -\mathbf{X}(\mathbf{U}_{JL} - \mathbf{X})((\mathbf{A}\mathbf{G})^\top \mathbf{A}\mathbf{G} + \Psi) \\ & + (\mathbf{U}_{JL} - 2\mathbf{X}) \text{diag}((\mathbf{A}\mathbf{G})^\top (\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{G}\mathbf{x}) - \Psi \mathbf{x}) \end{aligned} \quad (2.11)$$

式 (2.6) に存在する自明な平衡点の安定性は次の通り.

命題 2. すべての要素が 0, および, すべての要素が 1 である平衡点は, 共に, 局所的に不安定である.

証明. 式 (2.11) から, すべての要素が 0 の平衡点 $\mathbf{0}$ とすべての要素が 1 の平衡点 $\mathbf{1}$ に関するヤコビ行列は, それぞれ,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{0}) &= \text{diag}((\mathbf{AG})^\top \mathbf{y}) \\ &= \text{diag}((\mathbf{AG})^\top \mathbf{AGe})\end{aligned}$$

および,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{1}) &= \text{diag}((\mathbf{AG})^\top (-\mathbf{y} + \mathbf{AG}\mathbf{1}) + \Psi\mathbf{1}) \\ &= \text{diag}((\mathbf{AG})^\top \mathbf{AG}(\mathbf{1} - \mathbf{e}) + \Psi\mathbf{1})\end{aligned}$$

と書ける. したがって, 各行列のすべての固有値は非負であり, 平衡点は共に局所的に不安定であることがわかる. \square

さて, 次の集合を考えよう:

$$\mathcal{S} := \{\mathbf{s} \in [0, 1]^{JL} : \mathbf{y} = \mathbf{AGs}, \text{ and } \text{diag}(\mathbf{s})\Psi\mathbf{s} = \mathbf{0}\}$$

真値 (代数解) の平衡点 \mathbf{e} は集合 \mathcal{S} に属するが, 集合 \mathcal{S} には他の要素も存在する. そこで, 集合 (真値の平衡点集合と呼ぶ)

$$\mathcal{T} := \mathcal{S} \cap \{0, 1\}^{JL}$$

とそれ以外の集合 (偽値の平衡点集合と呼ぶ)

$$\mathcal{F} := \mathcal{S} \setminus \mathcal{T}$$

に分けておく.

命題 3. 式 (2.6) の平衡点が \mathcal{S} に属するとき, 平衡点は局所的に半安定である.

証明. まず, \mathcal{S} の部分集合 \mathcal{T} に属する任意の平衡点 \mathbf{e} を対象とする. このとき, $\text{diag}(\mathbf{e})(\mathbf{U}_{JL} - \text{diag}(\mathbf{e})) = \mathbf{0}$ かつ $\text{diag}(\mathbf{e})\Psi\mathbf{e} = \mathbf{0}$ が成り立つことから, 点 \mathbf{e} におけるヤコビ行列は

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{e}) &= -(\mathbf{U}_{JL} - 2\text{diag}(\mathbf{e}))\text{diag}(\Psi\mathbf{e}) \\ &= -\text{diag}(\Psi\mathbf{e})\end{aligned}$$

で与えられる. したがって, 固有値は非正となり, 平衡点 \mathbf{e} は局所的に半安定となる. 次に, 平衡点

$\mathbf{s} \in \mathcal{F}$ を考える． \mathbf{s} でのヤコビ行列は

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{s}) = & -\text{diag}(\mathbf{s})(\mathbf{U}_{JL} - \text{diag}(\mathbf{s}))((\mathbf{A}\mathbf{G})^\top \mathbf{A}\mathbf{G}) \\ & -\text{diag}(\mathbf{s})(\mathbf{U}_{JL} - \text{diag}(\mathbf{s}))\Psi \\ & -\text{diag}(\Psi \mathbf{s}) \end{aligned} \quad (2.12)$$

である．

$$\mathbf{S}^2 := \text{diag}(\mathbf{s})(\mathbf{U}_{JL} - \text{diag}(\mathbf{s}))$$

を満たす対角行列 \mathbf{S} を用いて、

$$\begin{aligned} \text{diag}(\mathbf{s})(\mathbf{U}_{JL} - \text{diag}(\mathbf{s}))((\mathbf{A}\mathbf{G})^\top (\mathbf{A}\mathbf{G})) &= \mathbf{S}^2 (\mathbf{A}\mathbf{G})^\top (\mathbf{A}\mathbf{G}) \\ &= \mathbf{S} (\mathbf{A}\mathbf{G})^\top (\mathbf{A}\mathbf{G}) \mathbf{S} \end{aligned}$$

より、式 (2.12) の第1項は非正定値行列であり、固有値はすべて非正である．

第1項の定値性に関する結果について別解を述べておく． $\text{diag}(\mathbf{s})(\mathbf{U}_{JL} - \text{diag}(\mathbf{s}))$ および $(\mathbf{A}\mathbf{G})^\top \mathbf{A}\mathbf{G}$ は共に非負定値行列である．また、共に対称行列であるので、これらの行列の積は正規行列である．ふたつの非負定値行列の積が正規行列であるとき積は非負定値行列となるので [21]、式 (2.12) の第1項は非正定値であり、固有値は全て非正である．

式 (2.12) の第2項は対角行列 $\text{diag}(\mathbf{s})(\mathbf{U}_{JL} - \text{diag}(\mathbf{s}))$ と対角成分がすべて0の行列 Ψ との積であるため、固有値はすべて0である．第三項は対角成分がすべて非正の対角行列であるので、固有値はすべて非正である．以上より、ヤコビ行列の固有値は各項のそれぞれの固有値の和であるので、式 (2.12) の固有値は非正であり、平衡点 \mathbf{s} は局所的に半安定である． \square

式 (2.6) の解は、真値の集合 \mathcal{T} だけでなく、偽値の集合 \mathcal{F} に属する平衡点にも収束する可能性があることが明らかとなった．

以下の解析と数値実験結果から、与えられた初期値から真値または偽値の平衡点へ至る収束の分離に重要な役割を果たすサドル型平衡点が存在することがわかる．

着目する平衡点集合を

$$\mathcal{Z} := \{\mathbf{z} \in (0, 1)^{JL} \setminus \mathcal{S} : (\mathbf{A}\mathbf{G})^\top \mathbf{y} - ((\mathbf{A}\mathbf{G})^\top \mathbf{A}\mathbf{G} + \Psi) \mathbf{z} = \mathbf{0}\}$$

および

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{Z}} := & \{\bar{\mathbf{z}} \in [0, 1]^{JL} \setminus \{\mathcal{S} \cup \{0\}^{JL} \cup \{1\}^{JL}\} : \\ & \text{diag}(\bar{\mathbf{z}})(\mathbf{U}_{JL} - \text{diag}(\bar{\mathbf{z}}))((\mathbf{A}\mathbf{G})^\top \mathbf{y} - ((\mathbf{A}\mathbf{G})^\top \mathbf{A}\mathbf{G} + \Psi) \bar{\mathbf{z}}) = \mathbf{0}\} \end{aligned}$$

により定義する．集合 $\bar{\mathcal{Z}}$ の要素は $\{0, 1\}$ に属し、 $\mathbf{z} \in \mathcal{Z}$ と $\bar{\mathbf{z}} \in \bar{\mathcal{Z}}$ には次の関係がある：

$$((\mathbf{A}\mathbf{G})^\top \mathbf{A}\mathbf{G} + \Psi)(\mathbf{z} - \bar{\mathbf{z}}) = \mathbf{0}$$

命題 4. 式 (2.6) の平衡点が \mathcal{Z} に属するとき、平衡点はサドル型の不安定性を持つ．

証明. 平衡点 $\mathbf{z} \in \mathcal{Z}$ でのヤコビ行列は

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{z}) = -\text{diag}(\mathbf{z})(\mathbf{U}_{JL} - \text{diag}(\mathbf{z}))((\mathbf{A}\mathbf{G})^\top \mathbf{A}\mathbf{G} + \mathbf{\Psi}) \quad (2.13)$$

である. 式 (2.13) の右辺のトレースは負であり, すなわち固有値の総和は負である.

一方, 行列 \mathbf{G} および, $\mathbf{\Psi}$ の定義より, 式 (2.13) は

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{z}) = & -\text{diag}(\mathbf{z})(\mathbf{U}_{JL} - \text{diag}(\mathbf{z})) \left(\left(\mathbf{A}^\top \mathbf{A} + \frac{1}{L} \mathbf{U}_J \right) \otimes (\mathbf{g}\mathbf{g}^\top) \right) \\ & + \text{diag}(\mathbf{z})(\mathbf{U}_{JL} - \text{diag}(\mathbf{z})) \left(\frac{1}{L} \mathbf{U}_J \otimes \text{diag}^2(\mathbf{g}) \right) \end{aligned} \quad (2.14)$$

と書ける. 式 (2.14) の第 1 項の行列はランク J で, その固有値は負である. また, 第 2 項はフルランクの対角行列で, その対角成分は正である. 従って, ヤコビ行列の固有値には正と負の両方が含まれ, 平衡点はサドル型不安定である. \square

2.5 数値実験

2.5.1 低次元系における解の挙動

式 (2.6) の力学系における解の振る舞いを詳しく観察するために, 画素数が 4 ($J = 2 \times 2$), 濃度ラベル集合 $\mathbf{g} = (g_1, g_2)^\top$ が 2 種類 ($L = 2$) の 8 次元系における数値実験を行った. このとき, 状態変数

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)^\top \quad (2.15)$$

に対応する濃度レベル g_1 および g_2 の分布はそれぞれ行列

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_5 & x_7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 & x_4 \\ x_6 & x_8 \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

により与えられる. また, 行列

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 x_1 + g_2 x_2 & g_1 x_3 + g_2 x_4 \\ g_1 x_5 + g_2 x_6 & g_1 x_7 + g_2 x_8 \end{pmatrix}, \quad (2.17)$$

により, 濃度値の分布が得られる.

実験条件は次の通りである. 濃度ラベル集合を

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

とした．対応する行列 \mathbf{G} , $\mathbf{\Psi}$ は次の通り：

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0.5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.19)$$

$$\mathbf{\Psi} = \begin{pmatrix} 0 & 0.25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

状態変数の真値を

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8)^\top \\ &= (1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0)^\top \end{aligned} \quad (2.21)$$

とし，真の濃度値は

$$\begin{aligned} \mathbf{Ge} &= (c_1, c_2, c_3, c_4)^\top \\ &= (0.5, 1, 1, 0)^\top \end{aligned} \quad (2.22)$$

である．0, 1 をそれぞれ黒色，白色に対応させたグレースケール画像として表現した真の濃度値の分布，濃度ラベル g_1 , g_2 の分布をそれぞれ図 2.1(a), (b), (c) に示す．

投影数は $I = 6$ とし，投影作用素は

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

とした． $\text{rank} \mathbf{A} = 4$ である．投影は $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{Ge}$ により求め，

$$\mathbf{y} = (1.5, 1, 0.5, 1, 1.5, 2)^\top \quad (2.24)$$

である．図 2.2 に各画素と投影と投影作用素 \mathbf{A} の関係を視覚化した．

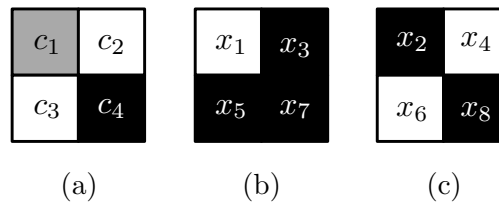


図 2.1 再構成目的の画像表現. (a) \mathbf{Ge} の画像表現. (b) ラベル g_1 の分布画像. (c) ラベル g_2 の分布画像

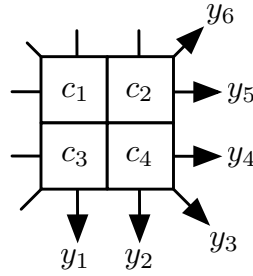


図 2.2 実験条件における画素，投影作用素，投影の関係

集合 \mathcal{Z} に属するサドル型平衡点 \mathbf{z} を

$$\mathbf{z} = ((\mathbf{AG})^\top \mathbf{AG} - \Psi)^{-1} (\mathbf{AG})^\top \mathbf{y} \quad (2.25)$$

により数値的に求め，

$$\begin{aligned} \mathbf{z} &= (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7, z_8)^\top \\ &= (0.489, 0.244, 0.933, 0.467, 0.933, 0.467, 0.044, 0.022)^\top \end{aligned} \quad (2.26)$$

を得た．

以上の問題設定において，式 (2.6) の力学系は状態変数の組 $(x_1, x_2), (x_3, x_4), (x_5, x_6), (x_7, x_8)$ がそれぞれ競争的に振る舞うことを意図しているため，これらの相互作用や，対応する各位相平面に射影した解の挙動に興味がある．

まず，適切な初期値のもとで式 (2.6) により期待する解が得られることを示す．数値積分には MATLAB の `ode113` 関数を用いた．当該関数はノンスティッフな常微分方程式を解くためのソルバーである．真値の濃度値分布に関する先見情報がないため，式 (2.6) における状態変数の初期値の要素は一様な値とし，その値を x_*^0 と書くことにする．数値実験により， $x_*^0 = 0.85$ で期待する解が得られることを確認した．図 2.3 に \mathbf{x} の時間変化を示す．解はサドル型平衡点 \mathbf{z} に一度近づいてから離れ，真値 \mathbf{e} に収束していることが確認できる．同図において横軸を対数とした理由は，サドル \mathbf{z} に近づくまでの時間と， \mathbf{z} から離れて真値 \mathbf{e} に収束するまでの時間が大きく異なるからである．

次に，異なる初期値を用いて，望ましくない偽の安定平衡点に収束することを示す．図 2.4 に初期値を $x_*^0 = 0.7$ とした \mathbf{x} の時間変化を示す．先の実験と同様に，解はサドル型平衡点 \mathbf{z} に一度近づく．その後， \mathbf{z} から離れ， \mathcal{S} に属する平衡点

$$\begin{aligned} \mathbf{s} &= (s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8)^\top \\ &= (0, 0.5, 0, 1, 0, 1, 0, 0)^\top \end{aligned} \quad (2.27)$$

に収束していることが確認できる．

安定平衡点の共存が理論的および実験的に示されたが，真の安定平衡点へ収束する初期値領域（ベイスン）が連続的に広く存在していれば，初期値依存性は深刻な問題とならない．図 2.5 は， \mathbf{e} および \mathbf{s} へ収束する解軌道を各位相平面に射影した位相空間図である．安定平衡点 \mathbf{e} および \mathbf{s} は黒丸でプロットしている．サドル型平衡点 \mathbf{z} を中抜き丸印でプロットしている．緑色および黄色の破線はそ

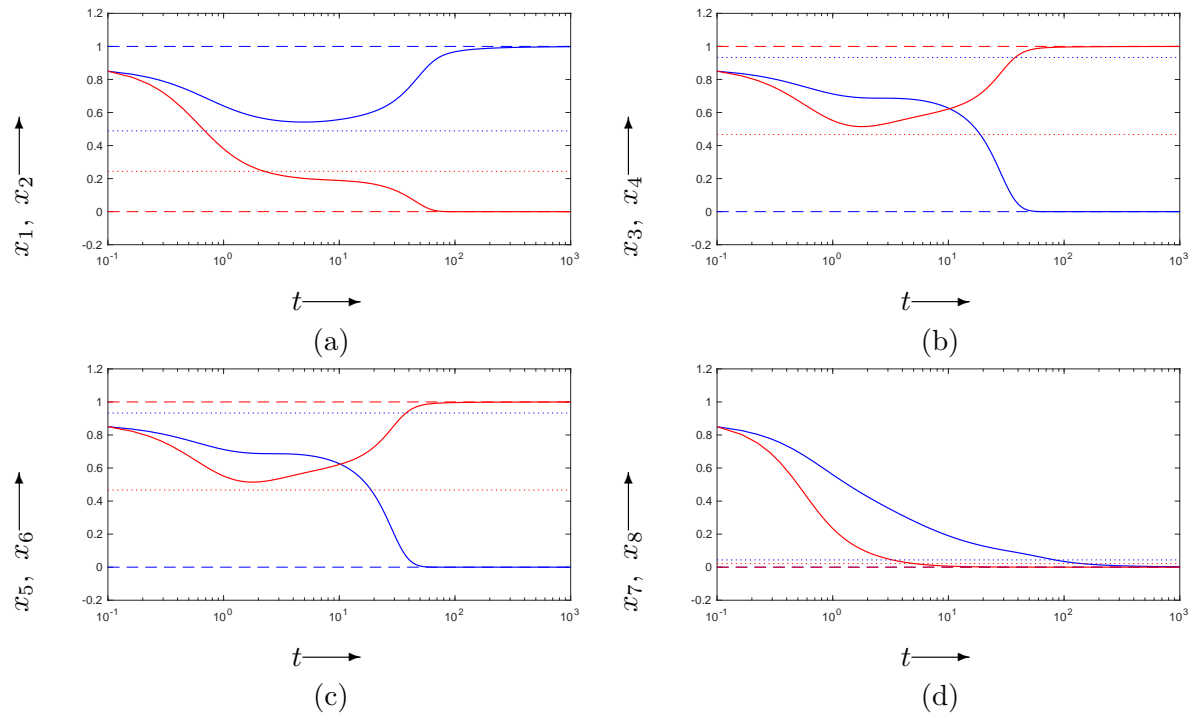


図 2.3 真の安定平衡点に収束する解の時間変化. (a) x_1, x_2 . (b) x_3, x_4 . (c) x_5, x_6 . (d) x_7, x_8 . 青色および赤色の各曲線はそれぞれ, x_1, x_3, x_5, x_7 および x_2, x_4, x_6, x_8 の各次元に関する値を表しており, 実線, 破線, 点線はそれぞれ, 解の時間変化, 真の平衡点 e , 偽の平衡点 s を表す.

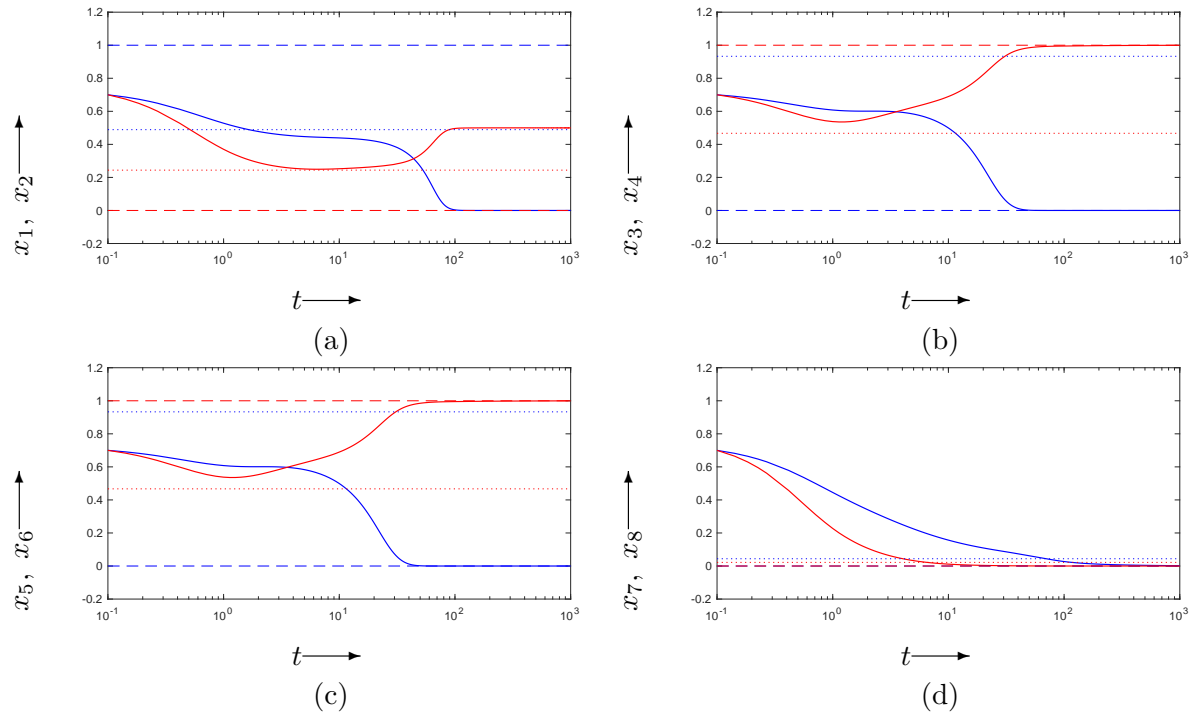


図 2.4 偽の安定平衡点に収束する解の時間変化. (a) x_1, x_2 . (b) x_3, x_4 . (c) x_5, x_6 . (d) x_7, x_8 . 青色および赤色の各曲線はそれぞれ, x_1, x_3, x_5, x_7 および x_2, x_4, x_6, x_8 の各次元に関する値を表しており, 実線, 破線, 点線はそれぞれ, 解の時間変化, 真の平衡点 e , 偽の平衡点 s を表す.

れぞれ、 z の安定多様体および不安定多様体である．赤色および青色の実線はそれぞれ $x_*^0 = 0.72$ および $x_*^0 = 0.77$ を初期値とする解軌道である．同様に，異なる初期値を与えた結果を図 2.6 に示す．赤色および青色の実線はそれぞれ $x_*^0 = 0.960$ および $x_*^0 = 0.999$ を初期値とする解軌道である．この結果から， z の安定多様体が，ベイスンをわける境界になっていると予想される．実際，平衡点 e のベイスン境界で生じる挙動を調べるため，一様な初期値を連続的に変化させて解の収束先を確認する手続きを繰り返す実験を行ったところ，以下の結果を得た．すなわち， $0.7443 < x_*^0$ で (x_1, x_2) が (e_1, e_2) に収束し， $x_*^0 < 0.9950$ で (x_3, x_4, x_5, x_6) が (e_3, e_4, e_5, e_6) に収束する． $x_*^0 < 0.9957$ で (x_7, x_8) は $(e_7, e_8) = (0, 0)$ に収束する．以上のことを総合すると， $0.7443 < x_*^0 < 0.9950$ で x は e に収束しており，真の解に収束するベイスンが存在していることがわかる．

参考のため，同じ実験条件で，式 (2.6) から $(-\Psi x)$ の項を除いた系

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= X(U_{JL} - X)(AG)^\top(y - AGx), \\ x(0) &= x^0 \end{aligned} \tag{2.28}$$

について， $x_*^0 = 0.1, 0.2, \dots, 0.9$ から出発する解軌道を調べ，結果を位相平面図を図 2.7 に示しておく．いずれの初期値からスタートする解軌道も $y = AGx$ を満たす集合の一点に収束しているが， e に収束することはない．

2.5.2 高次元系における再構成画像

本節では、再構成画像の品質を評価するため、比較的高次元系での数値実験を行う。

数値実験条件として、正方画像の一辺が 64 ($J = 64 \times 64$) のファントムを用い、角度を 2° ごとに 90 方向 ($I = 90 \times 95$) から平行に X 線を照射する検出器を 95 個備えた X 線 CT を数値的に模擬する。投影作用素 \mathbf{A} は離散ラドン変換により求め、投影は $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{G}\mathbf{e}$ により計算した。ファントムの濃度値 $\mathbf{G}\mathbf{e}$ をグレースケールに表現した画像を図 2.8(a) に示す。同図 (b) は、均一な濃度値を持つ各領域の濃度値を示したものである。濃度ラベルは 0.5 および 1 である。同図 (c) は、検出器の位置を横軸に、投影角度を縦軸にとったときの投影の分布画像（サイノグラム）を示す。参考のため、このサイノグラムを FBP により再構成した画像を同図 (d) に示す。FBP のフィルタには Ramachandran-Lakshminarayanan フィルタを用いた。FBP では投影方向数が不十分であるため、再構成画像は正確でないことがわかる。同図 (e) は、同図 (d) の画素値を 0 以上 0.25 未満を黒色、0.25 以上 0.75 未満を灰色、0.75 以上を白色に閾値処理したものである。FBP で得られた再構成画像は、領域の輪郭が明瞭ではないため、輪郭周辺に欠損が生じている。

背景を除く濃度値は 2 種類 ($L = 2$) であり、濃度ラベル集合は

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

である。初期値を $x_*^0 = 0.85$ に選び、MATLAB の ode113 を用いて式 (2.6) を数値積分し、解を得た。図 2.9(a) および (b) に、それぞれ $\mathbf{W}(1, 0)^\top$ および $\mathbf{W}(0, 1)^\top$ により生成した濃度ラベル g_1 および濃度ラベル g_2 の分布を、同図 (c) に $\mathbf{W}\mathbf{g}$ により生成した濃度値の分布をグレースケールで表現した画像を示す。図 2.8(d) と 2.9(c) の品質の違いを詳しく観察するために、それぞれの画像の 26 行目の画素に固定した水平方向の濃度プロファイルを図 2.10 に示す。FBP と比較して提案法は輪郭をより正確に再現しており、かつ、濃度値が均一な領域においても平坦な画像を再構成しており、ファントムを精度良く再現していることがわかる。実際、ファントムとの 1 ノルムによる距離を調べると、FBP による結果は 87 であるのに対し、提案法による結果は 1.3 と非常に小さい。

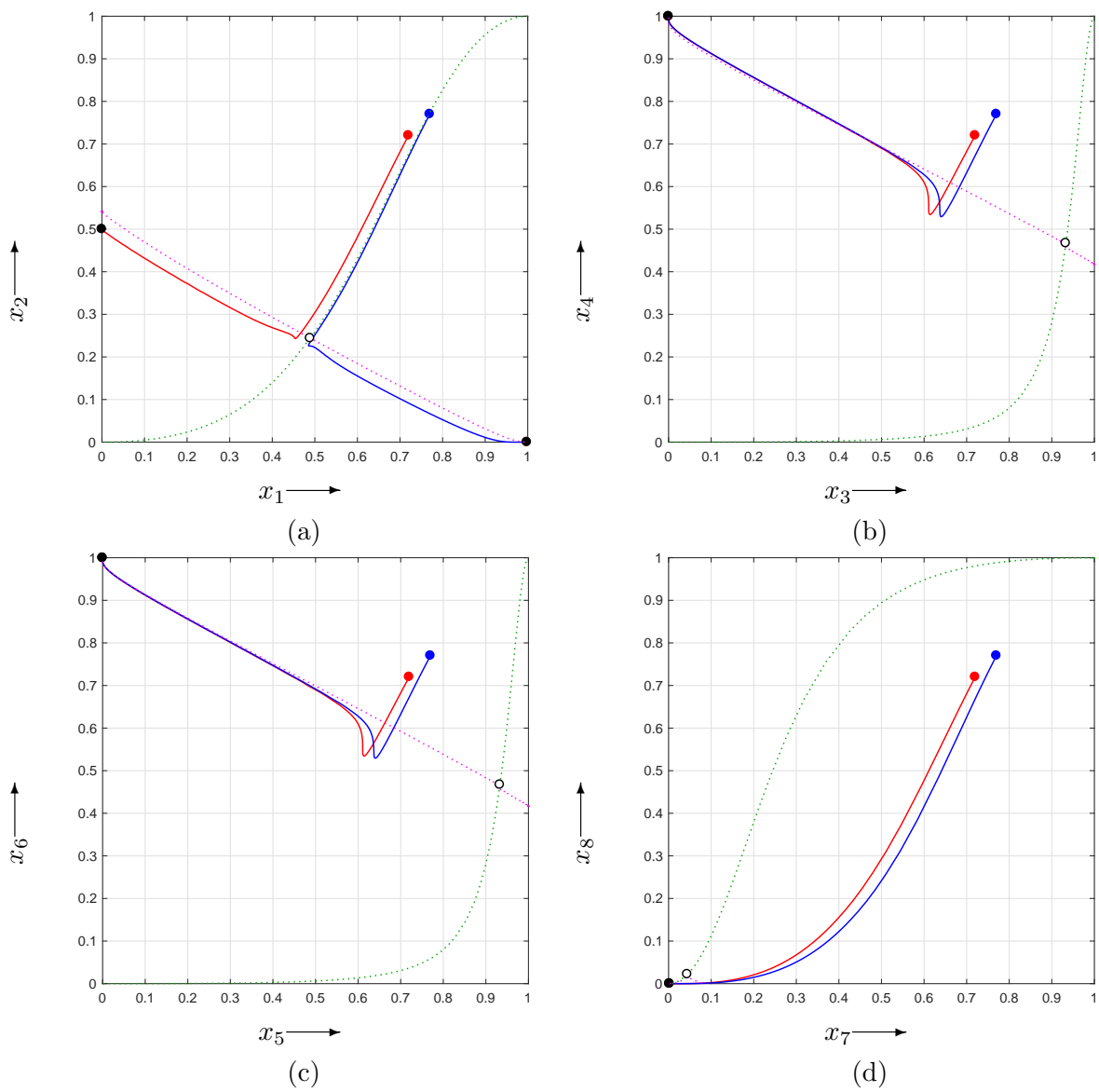


図 2.5 位相平面に射影した系 (2.6) の平衡点と解軌道 (1). (a) x_1 - x_2 位相平面. (b) x_3 - x_4 位相平面. (c) x_5 - x_6 位相平面. (d) x_7 - x_8 位相平面.

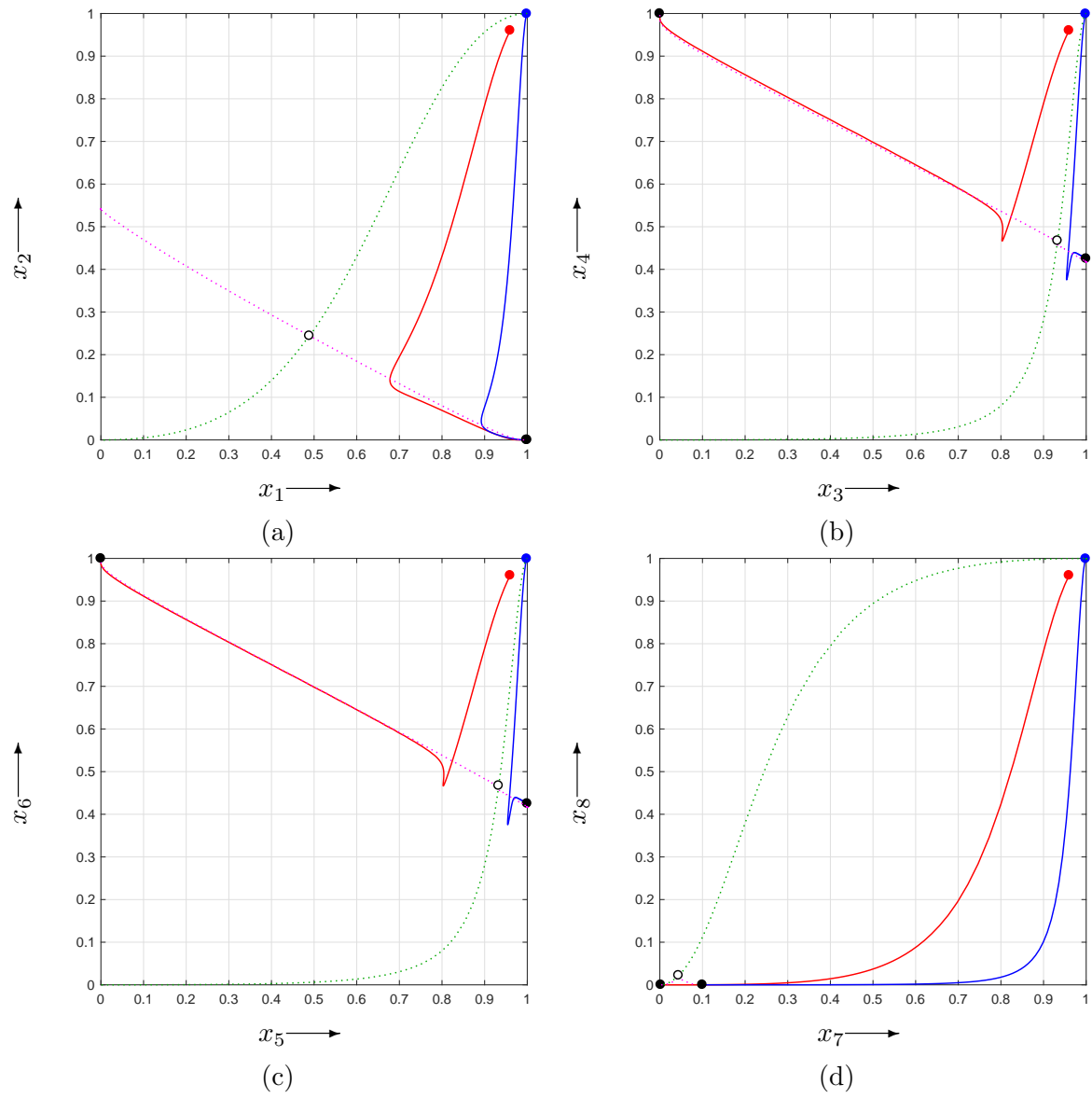


図 2.6 位相平面に射影した系 (2.6) の平衡点と解軌道 (2). (a) x_1 - x_2 位相平面. (b) x_3 - x_4 位相平面. (c) x_5 - x_6 位相平面. (d) x_7 - x_8 位相平面.

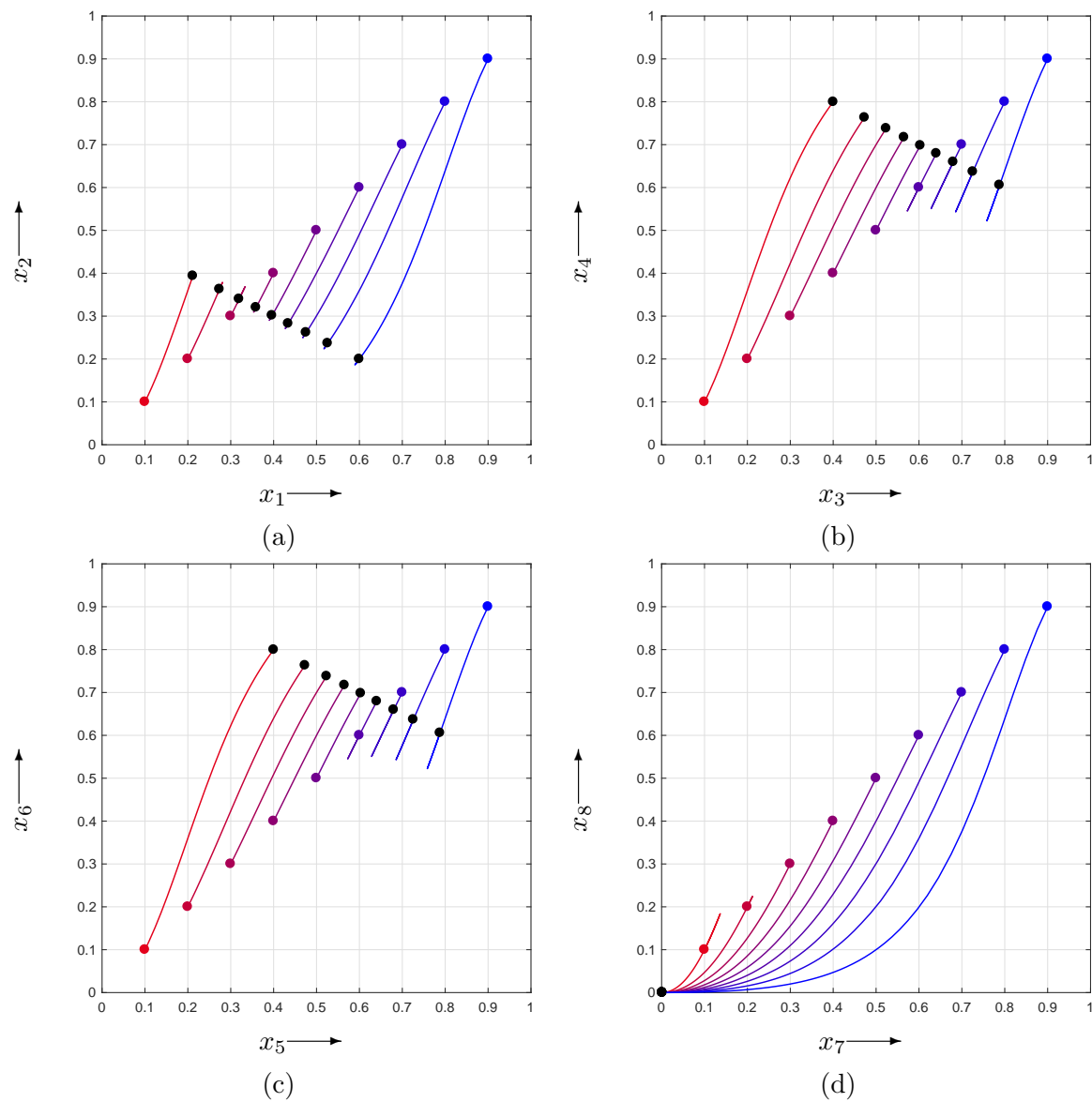


図 2.7 位相平面に射影した系 (2.28) の平衡点と解軌道. (a) x_1 - x_2 位相平面. (b) x_3 - x_4 位相平面. (c) x_5 - x_6 位相平面. (d) x_7 - x_8 位相平面. 色付きの丸印は一樣な初期値を表しており, 同色の曲線は解軌道を表す. 黒丸印は平衡点を表している.

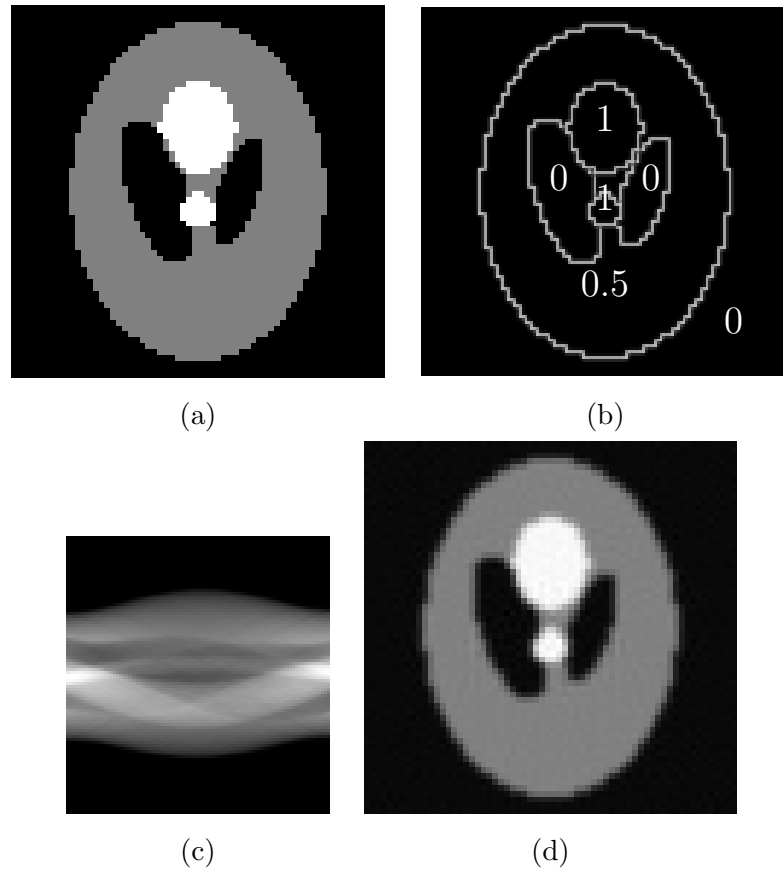


図 2.8 実験対象のデジタルファントムと参考画像. (a) デジタルファントム. (b) 濃度分布. (c) サイノグラム. (d) FBP による再構成画像.

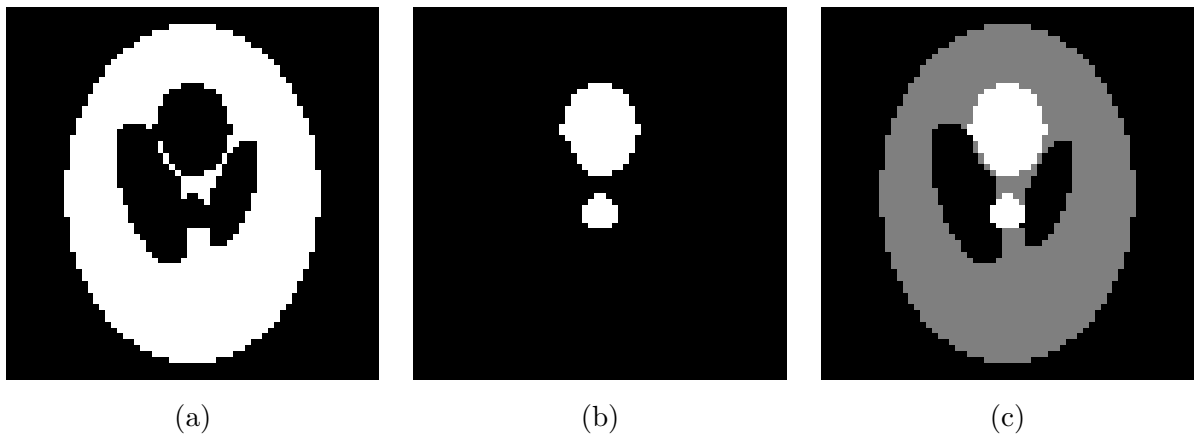


図 2.9 比較的多数画素の再構成結果. (a) ラベル値 0.5 に対応する分割画像 $W(t)(1, 0)^\top$. (b) ラベル値 1 に対応する分割画像 $W(t)(0, 1)^\top$. (c) 各分割画像の合成画像 $W(t)g$. $x_*^0 = 0.85$, $t = 10,000$.

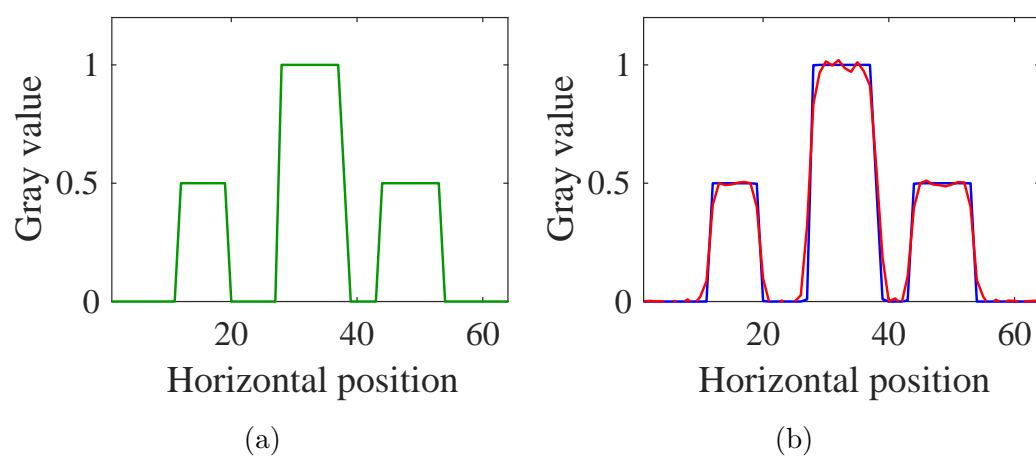


図 2.10 再構成画像の濃度プロファイル. 26 行目の画素に固定. (a) ファントム画像のプロファイル. (b) 提案法による合成画像と FBP による再構成画像のプロファイル. 緑, 赤, 青の実線はそれぞれ図 2.8(a), 2.8(d), 2.9(c) の濃度値を示す

第 3 章

非自律系に基づく離散値トモグラフィ再構成法

3.1 はじめに

前章では濃度ラベルが既知である離散値トモグラフィに対し、一般化ロトカ・ボルテラ方程式と類似した構造を持つ自律系 (2.6) の初期値問題に基づく方法について述べた。

近年、離散値トモグラフィの実際の問題への応用を考慮して、濃度ラベルが既知でない場合にも適切に機能する離散値トモグラフィの研究が行われている。一例として、濃度ラベルの数のみが既知で値が未知である場合に、濃度ラベル値を推定する手続きを DART に加えた方法が提案されている [22]。

画像診断支援システムへの応用において、臓器や腫瘍などの領域を自動的に抽出することを目的とした場合に、各領域のおおよその濃度ラベル値を与えることができるが、領域の濃度値は完全に均一ではない。本章では、与えられる濃度ラベル値が不正確である場合において、濃度値が与えられた濃度ラベルに適切に丸められた画像の再構成を達成できるよう、提案法を拡張する方法について述べる。濃度ラベルが不正確であるとき、代数方程式 $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{G}\mathbf{x}$ の解は $\{0, 1\}^{JL}$ に存在せず、任意の $1 \leq j \leq J$ について、 $\sum_{\ell=1}^L x_{jL+\ell} = 1$ または $\sum_{\ell=1}^L x_{jL+\ell} = 0$ を満たすことができないため、逆問題は非適切となる。提案系 (2.6) は、競争的ダイナミクスを意図して加えられた項により濃度値を濃度ラベルに丸めるように作用するが、代数方程式より導かれた項がそれを抑制することが問題となる。拡張系は、画像再構成の逆問題の項と、排他的な振る舞いを実現する項の作用を時間変化とともに強調・抑制し、非適切な状況においても目的を実現することが可能となる。

本章では、画素値の濃度ラベルへの丸めを実現するために、非線形微分方程式系 (2.6) を非自律系へ拡張し、数値実験結果を述べる。

3.2 非自律系への拡張

次の非自律系を提案する:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{X}(\mathbf{U}_{JL} - \mathbf{X}) \left(\alpha(t) (\mathbf{A}\mathbf{G})^\top (\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{G}\mathbf{x}) - (1 - \alpha(t)) \Psi \mathbf{x} \right), \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}^0, \\ \alpha(t) &= \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right), \tau \in \mathbb{R}_+. \end{aligned} \quad (3.1)$$

$\alpha(t)$ を導入した理由について説明する. 前章の実験から, 比較的早期に式 (2.2) を近似的に満たす解が得られることがわかっている. 従って, 時間発展の初期においては $\Psi \mathbf{x}$ の項による競争的挙動を抑制しておく. 時間が経過すると共に競争的挙動の効果を徐々に強調し, 濃度値の再構成を達成する項 $(\mathbf{A}\mathbf{G})^\top (\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{G}\mathbf{x})$ は抑制する. 最終的には競争的挙動が支配的となり, 式 (2.2) を完全には満たさない, 排他的な解を得る. 関数 $\alpha(t)$ に含まれるパラメータ τ は, 強調・抑制の時期を制御するためのパラメータである.

3.3 数値実験

3.3.1 低次元系における連続時間非自律系の解の挙動

2.5.1 節と同じ条件で数値実験を行い, 非自律系の振る舞いを数値的に確かめた. 画素数が $J = 2 \times 2$ で画素値が

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= (c_1, c_2, c_3, c_4)^\top \\ &= (0.6, 1, 1, 0)^\top \end{aligned} \quad (3.2)$$

であるデジタルファントムに対し, 投影作用素

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

より測定した投影

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \mathbf{A}\mathbf{c} = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6)^\top \\ &= (1.6, 1, 0.6, 1, 1.6, 2)^\top \end{aligned} \quad (3.4)$$

により, 濃度ラベル集合

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

を用いて離散値トモグラフィ画像再構成を行う．画素 c_1 を濃度ラベル値 g_1 に丸めることを目的としており，目的の結果は

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8)^\top \\ &= (1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0)^\top. \end{aligned} \quad (3.6)$$

である．

図 3.1 に初期値を $x_*^0 = 0.85$ とした非自律系 (3.1) による時刻 t に対する解の時間発展を示す．真値 \mathbf{e} に収束させることに成功している．

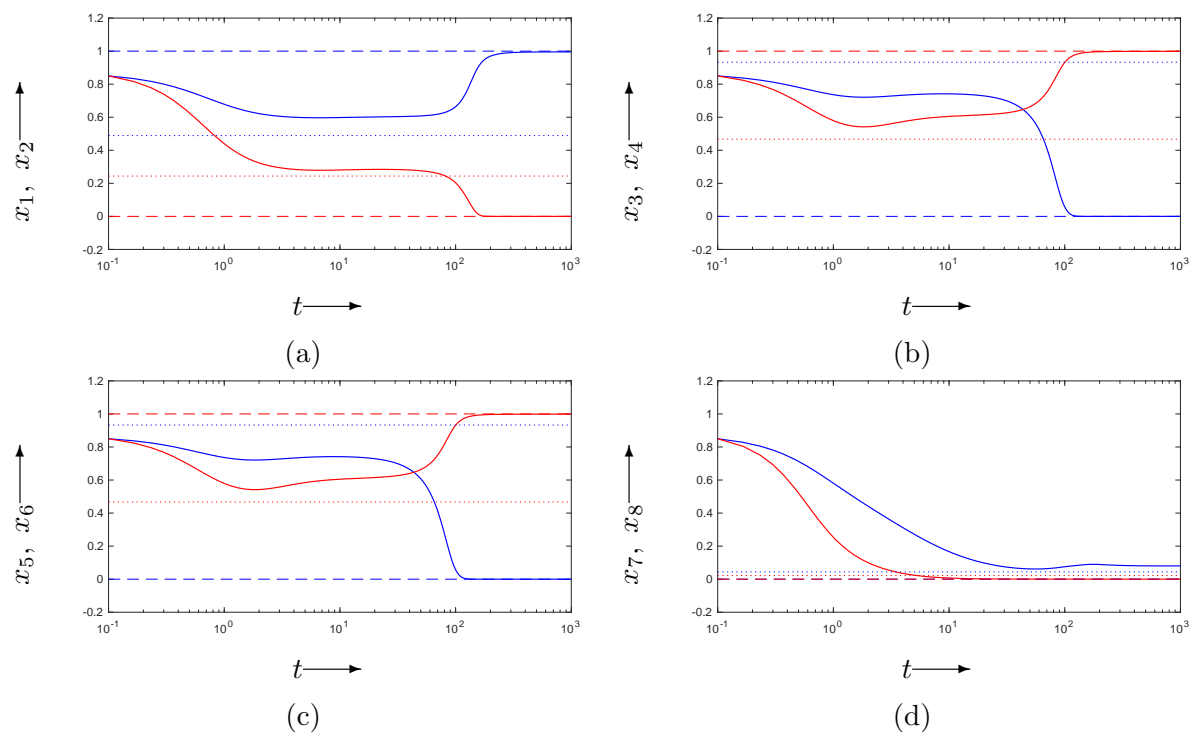


図 3.1 真の安定平衡点に収束する解の時間変化. (a) x_1, x_2 . (b) x_3, x_4 . (c) x_5, x_6 . (d) x_7, x_8 . 青色および赤色の各曲線はそれぞれ, x_1, x_3, x_5, x_7 および x_2, x_4, x_6, x_8 の各次元に関する値を表しており, 実線, 破線, 点線はそれぞれ, 解の時間変化, 真の平衡点 \mathbf{e} , 偽の平衡点 \mathbf{s} を表す.

3.3.2 高次元系における再構成画像

式 (3.1) の力学系により，比較的多数画素数の離散値トモグラフィを達成できることを数値的に確かめる．実験条件は 3.3.2 節のものと同様に，正方形画の一辺が 64 ($J = 64 \times 64$) のファントムを用い，角度を 2° ごとに 90 方向 ($I = 90 \times 95$) から平行に X 線を照射する検出器を 95 個備えた X 線 CT を数値的に模擬する．ただし，ファントムには濃度ラベル値とは異なる画素値の領域を持たせた．投影作用素 \mathbf{A} は離散ラドン変換により求め，投影は $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{G}\mathbf{e}$ により計算した．ファントムの濃度値 $\mathbf{G}\mathbf{e}$ をグレースケールに表現した画像を図 3.2(a) に示す．同図 (b) は，均一な濃度値を持つ各領域の濃度値を示したものである．同図 (c) は，検出器の位置を横軸に，投影角度を縦軸にとったときの投影の分布画像（サイノグラム）を示す．参考のため，このサイノグラムを FBP により再構成した画像を同図 (d) に示す．

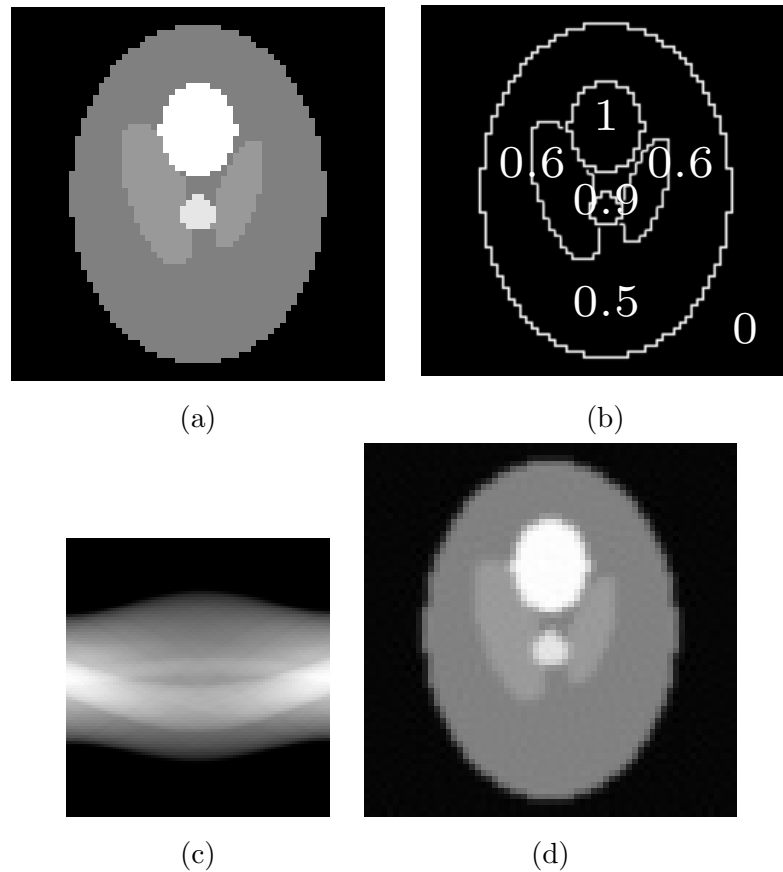


図 3.2 実験対象のデジタルファントムと参考画像. (a) デジタルファントム. (b) 濃度分布. (c) サイノグラム. (d) FBP による再構成画像.

背景を除く濃度値は 2 種類 ($L = 2$) であり，濃度ラベル集合は

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

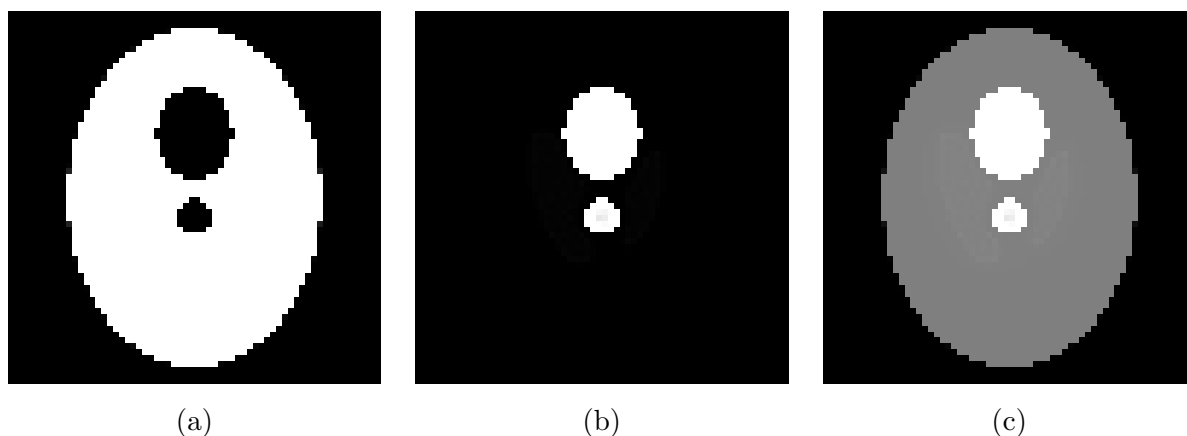


図 3.3 比較的多数画素の再構成結果. (a) ラベル値 0.5 に対応する分割画像 $W(t)(1, 0)^\top$. (b) ラベル値 1 に対応する分割画像 $W(t)(0, 1)^\top$. (c) 各分割画像の合成画像 $W(t)g$. $x_*^0 = 0.85$, $t = 10,000$.

である. 初期値を $x_*^0 = 0.85$ に選び, MATLAB の `ode113` を用いて式 (3.1) を数値積分し, 解を得た. 図 3.3(a) および (b) に, それぞれ $W(1, 0)^\top$ および $W(0, 1)^\top$ により生成した濃度ラベル g_1 および濃度ラベル g_2 の分布を, 同図 (c) に Wg により生成した濃度値の分布をグレースケールで表現した画像を示す. 図 3.2(d) と 3.3(c) の品質の違いを詳しく観察するために, それぞれの画像の 26 行目の画素に固定した水平方向の濃度プロファイルを図 3.4 に示す.

ファントム上では濃度値が 0.6 である領域が, 濃度ラベル g_1 に丸められた画像を再構成できていることがわかる. さらに, 自律系 (2.6) を用いた結果と同様に, FBP と比較して提案法は輪郭をより正確に再現しており, かつ, 濃度値が均一な領域においても平坦な画像を再構成しており, ファントムを精度良く再現していることがわかる.

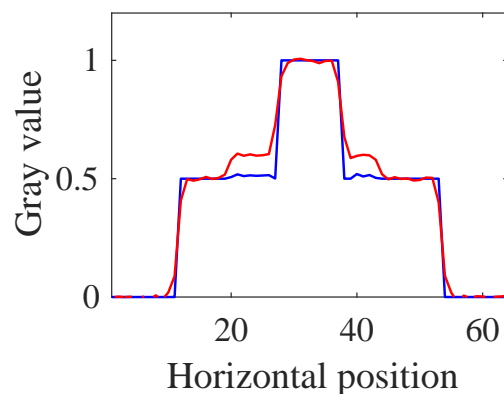


図 3.4 再構成画像の濃度プロファイル. 26 行目の画素に固定. 提案法による合成画像と FBP による再構成画像のプロファイル. 赤, 青の実線はそれぞれ 3.2(d), 3.3(c) の濃度値を示す

第 4 章

結論

本論文では、非線形微分方程式系の初期値問題に基づき離散値トモグラフィを達成する方法を提案した。画素値を構成する濃度ラベル間で排他的仕組みを実現するため、非線形微分方程式系を一般化ロトカ・ボルテラ型の競争モデルに基づき構成した。提案法のように、競争モデルのダイナミクスに動機づけられて導出した微分方程式を原理に用いたアプローチは本研究が最初である。

第 1 章では、連続時間画像再構成法について、関連する力学系理論と先行研究をまとめた。連続時間画像再構成法は、リアプノフの安定性定理および平衡点に関するヤコビ行列の固有値により、それぞれ平衡点の大域的および局所的安定性を理論的に証明できる特徴がある。

第 2 章では、離散値トモグラフィを達成する自律系を提案した。特に重要な成果として、系に存在する平衡点集合を特定し、平衡点の局所的な安定性を理論的に証明している。理論的解析結果により安定平衡点の共存が明らかとなった。系に存在するサドル型平衡点の多様体が理想解へ収束するベイスンの境界に重要な役割を果たすことを見出し、ベイスンが連続的に広く存在すること示す足がかりとなった。

第 3 章では、与えられる濃度ラベル値が不正確である場合において、濃度値が与えられた濃度ラベルに適切に丸められた画像の再構成を達成できるよう、2 章の自律系を非自律系に拡張した。拡張系は、画像再構成の逆問題の項と、排他的な振る舞いを実現する項の作用を時間変化とともに強調・抑制することで、目的を実現することが可能である。

本研究の延長線上にある興味深い問題としては、理想解に収束するベイスンの拡大がある。現在、提案系において排他的仕組みを実現するために加えた線形項を非線形に拡張することによる解決を試みている。

また、数値離散による演算速度の改善は重要な課題である。提案系は硬い微分方程式系となっているため、オイラー法による数値離散では刻み幅を大きくとることができない。現在、加法的オイラー法と乗法的オイラー法の混成による数値離散 [23] の適用による解決を試みている。

謝辞

本論文は筆者が徳島大学大学院先端技術科学教育部博士後期課程に在籍中の研究成果をまとめたものです。徳島大学情報センター 上田 哲史教授には指導教員として研究の遂行にあたって懇切なご指導を戴きました。ここに、深謝の意を表します。徳島大学大学院医歯薬学研究部 吉永 哲哉教授には研究の全過程を通じて、御指導と御鞭撻を戴きました。深謝の意を表します。徳島大学情報センター 松浦 健二教授、並びに、徳島大学大学院先端技術科学教育部 西尾 芳文教授には副査としてご助言を戴きました。感謝の意を表します。国立病院機構四国こどもととなの医療センター 山口 雄作博士には、ご討論と有益な助言を戴きました。感謝の意を表します。

参考文献

- [1] A.C. Kak and M. Slaney. *Principles of Computerized Tomographic Imaging*. IEEE Service Center, Piscataway, NJ, USA, 1988.
- [2] H. Stark. *Image Recovery Theorem and Application*. Academic Press, Orlando, Fla, USA, 1987.
- [3] K. Fujimoto, O.M. Abou Al-Ola, and T. Yoshinaga. Continuous-time image reconstruction using differential equations for computed tomography. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 15(6):1648 – 1654, 2010.
- [4] O.M. Abou Al-Ola, K. Fujimoto, and T. Yoshinaga. Common Lyapunov function based on Kullback-Leibler divergence for a switched nonlinear system. *Mathematical Problems in Engineering*, Article ID 723509, 12 pages, 2011, 2011.
- [5] Y. Yamaguchi, T. Kojima, and T. Yoshinaga. Noise reduction in computed tomography using a multiplicative continuous-time image reconstruction method. *Proc. SPIE*, 9783:97834T–97834T–7, 2016.
- [6] K. Tateishi, Y. Yamaguchi, O.M. Abou Al-Ola, T. Kojima, and T. Yoshinaga. Continuous analog of multiplicative algebraic reconstruction technique for computed tomography. *Proc. SPIE*, 9783:97834Q–97834Q–8, 2016.
- [7] K. Tateishi, Y. Yamaguchi, O.M. Abou Al-Ola, and T. Yoshinaga. Continuous analog of accelerated os-em algorithm for computed tomography. *Mathematical Problems in Engineering*, Article ID 1564123, 8 pages, 2017, 2017.
- [8] Y. Yamaguchi, K. Fujimoto, O.M. Abou Al-Ola, and T. Yoshinaga. Continuous-time image reconstruction for binary tomography. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 18(8):2081–2087, 2013.
- [9] Y. Yamaguchi, K. Fujimoto, and T. Yoshinaga. Extended continuous-time image reconstruction system for binary and continuous tomography. *Journal of Signal Processing*, 17(4):163–166, 2013.
- [10] L.A. Shepp and Y. Vardi. Maximum likelihood reconstruction for emission tomography. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 1(2):113–122, 1982.
- [11] H. Aktore. *Multiplicative Runge-Kutta Methods*. PhD thesis, Eastern Mediterranean University, Institute of Graduate Studies and Research, Dept. of Mathematics, 2011.

- [12] D. Aniszewska. Multiplicative Runge–Kutta methods. *Nonlinear Dynamics*, 50(1):265–272, Oct 2007.
- [13] C.L. Byrne. Iterative image reconstruction algorithms based on cross-entropy minimization. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2(1):96–103, 1993.
- [14] H.M. Hudson and R.S. Larkin. Accelerated image reconstruction using ordered subsets of projection data. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 13(4):601–609, 1994.
- [15] S. Kullback and R. A. Leibler. On information and sufficiency. *Ann. Math. Statist.*, 22(1):79–86, 03 1951.
- [16] K.J. Batenburg and J. Sijbers. DART: A practical reconstruction algorithm for discrete tomography. *IEEE Transactions on Image Processing*, 20(9):2542–2553, 2011.
- [17] K.J. Batenburg, J. Sijbers, H.F. Poulsen, and E. Knudsen. Dart: A robust algorithm for fast reconstruction of 3d grain maps. *Journal of Applied Crystallography*, 43:1464–1473, 2010.
- [18] L. Varga, P. Balázs, and A. Nagy. An energy minimization reconstruction algorithm for multivalued discrete tomography. In *3rd International Symposium on Computational Modeling of Objects Represented in Images*, pages 179–185, 2012.
- [19] S. Weber. *Discrete Tomography by Convex-Concave Regularization using Linear and Quadratic Optimization*. PhD thesis, Heidelberg University, 2009.
- [20] J.D. Murray. *Mathematical Biology*. Springer-Verlag New York, 2002.
- [21] A.R. Meenakshi and C. Rajian. On a product of positive semidefinite matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 295(1):3–6, 1999.
- [22] J. Nemeth. Discrete tomography with unknown intensity levels using higher-order statistics. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 53(3):314–331, 2015.
- [23] R. Kasai, Y. Yamaguchi, T. Kojima, and T. Yoshinaga. Tomographic image reconstruction based on minimization of symmetrized kullback-leibler divergence. *Mathematical Problems in Engineering*, Article ID 8973131, 9 pages, 2018, 2018.

本研究に関連する文献

本研究に関する原著論文

- [1] Takeshi Kojima, Tetsushi Ueta, and Tetsuya Yoshinaga, Multivalued Discrete Tomography Using Dynamical System That Describes Competition. Mathematical Problems in Engineering, Volume 2017, Article ID 8160354, 9 pages, Nov 2017.

本研究に関する国際会議

- [2] Ryosuke Kasai, Yusaku Yamaguchi, Takeshi Kojima and Tetsuya Yoshinaga, Hybrid algorithm of maximum-likelihood expectation-maximization and multiplicative algebraic reconstruction technique for iterative tomographic image reconstruction. IWAIT-IFMIA 2019, Singapore, Jan. 2019.
- [3] Takeshi Kojima, Kiyoko Tateishi, Yusaku Yamaguchi and Tetsuya Yoshinaga, Discretization of Continuous Analog to Accelerated Expectation-Maximization Algorithm for Computed Tomography. NOLTA 2018, Tarragona, Sep. 2018.
- [4] Yusaku Yamaguchi, Michiko Mori, Takeshi Kojima and Tetsuya Yoshinaga, Nonautonomous Nonlinear Dynamical System for Reconstructing Magnetic Resonance Image. NOLTA 2018, Tarragona, Sep. 2018.
- [5] Masashi Kimura, Akira Kinokiri, Takeshi Kojima, Yusaku Yamaguchi and Tetsuya Yoshinaga, Total-Variation Minimization with Regularization for Continuous-Time Dynamical Image Reconstruction in Computed Tomography. NOLTA 2018, Tarragona, Sep. 2018.
- [6] An attempt to enlarge basin in discrete tomographic dynamics with a competitive term. Takeshi Kojima, Tetsushi Ueta and Tetsuya Yoshinaga, NCSP'18, Honolulu, Mar. 2018.
- [7] Yusaku Yamaguchi, Takeshi Kojima and Tetsuya Yoshinaga, Tomographic Image Reconstruction via Chi-Square Minimization. NCSP'18, Honolulu, Mar. 2018.
- [8] Keita Nakahama, Takeshi Kojima and Tetsuya Yoshinaga, Applying dynamical method of discrete tomography to X-ray CT imaging. IFMIA'17, Okinawa, Jan. 2017.
- [9] Kiyoko Tateishi, Yusaku Yamaguchi, Omar M. Abou Al-Ola, Takeshi Kojima and Tetsuya Yoshinaga, Continuous analog of multiplicative algebraic reconstruction technique for com-

puted tomography. SPIE 2016, San Diego, Feb. 2016.

- [10] Yusaku Yamaguchi, Takeshi Kojima and Tetsuya Yoshinaga, Noise reduction in computed tomography using a multiplicative continuous-time image reconstruction method. SPIE 2016, San Diego, Feb. 2016.

本研究に関する学会研究会資料等

- [11] 木ノ桐 瑛, 木村 雅司, 兒島 雄志, 吉永 哲哉, ヘリンガー距離の全変動に基づく正則化を考慮した連続時間 CT 画像再構成法. 中四国放射線医療技術フォーラム, 2018 年 11 月.
- [12] 笠井 亮佑, 山口 雄作, 兒島 雄志, 吉永 哲哉, 期待値最大化法と乗法的代数的再構成法を拡張した新しい逐次 CT 画像再構成法. 中四国放射線医療技術フォーラム, 2018 年 11 月.
- [13] 工藤 萌, 山口 雄作, Omar M. Abou Al-Ola, 兒島 雄志, 吉永 哲哉, 一般化ヘリンガー距離の最小化に基づく逐次画像再構成法. Proc. of the 116th Scientific Meeting of JSMP, Vol.38, No.3, 2018 年 9 月.
- [14] 山口 雄作, 笠井 亮佑, 兒島 雄志, 吉永 哲哉, 連続時間断層画像再構成法の加法的・乗法的及びその混成による離散化. Proc. of the 116th Scientific Meeting of JSMP, Vol.38, No.3, 2018 年 9 月.
- [15] 工藤 萌, 山口 雄作, 兒島 雄志, 吉永 哲哉, 一般化 Hellinger 距離の最小化に基づく CT 画像再構成. 第 40 回日本生体医工学会中国四国支部大会プログラム講演抄録, 2017 年 10 月.
- [16] 兒島 雄志, 上田哲史, 吉永 哲哉, 拘束条件を持つ連続時間 CT 画像再構成法. 第 40 回日本生体医工学会中国四国支部大会プログラム講演抄録, 2017 年 10 月.
- [17] 池田 大輔, 水田 希咲, 山口 雄作, 兒島 雄志, 吉永 哲哉, ヘリンガー距離の最小化に基づく動的再構成法の X 線 CT 画像への適用. 日本放射線技術学会第 73 回総会学術大会予稿集, 2017 年 4 月.
- [18] 山口 雄作, 兒島 雄志, 吉永 哲哉, 非自律系非線形微分方程式に基づく磁気共鳴画像再構成. 日本放射線技術学会第 73 回総会学術大会予稿集, 2017 年 4 月.
- [19] 水田 希咲, 山口 雄作, 兒島 雄志, 吉永 哲哉, Hellinger 距離の最小化に基づく CT 画像再構成, 第 39 回日本生体医工学会中国四国支部大会プログラム講演抄録, 2016 年 10 月.
- [20] Takeshi Kojima, Tetsushi Ueta and Tetsuya Yoshinaga, Stability analysis of a dynamical system describing competition for multi-valued discrete tomography. 日本生体医工学会専門別研究会生体医用画像研究会第 4 回若手発表会抄録, 2017 年 3 月.
- [21] 原野 真太郎, 兒島 雄志, 吉永 哲哉, 連続時間 CT 画像再構成法を用いた金属アーチファクト削減の効果. 第 111 回日本医学物理学会学術大会, 2016 年 4 月.
- [22] 中濱 寿太, 兒島 雄志, 吉永 哲哉, 微分方程式を用いた離散トモグラフィの X 線 CT 画像への適用. 第 39 回日本生体医工学会中国四国支部大会プログラム講演抄録, 2016 年 10 月.
- [23] 原野 真太郎, 兒島 雄志, 吉永 哲哉, 金属アーチファクト削減のための連続時間 CT 画像再構成法. 第 38 回日本生体医工学会中国四国支部大会プログラム講演抄録, 2015 年 11 月.
- [24] 中濱 寿太, 兒島 雄志, 吉永 哲哉, 非線形微分方程式を用いた離散トモグラフィ. 第 38 回日本生

体医工学会中国四国支部大会プログラム講演抄録, 2015 年 11 月.

- [25] 兒島 雄志, 吉永 哲哉, 競争モデルに基づく離散値トモグラフィ. 電気学会研究会資料, 2015 年 11 月.